

Phép biến đổi sơ cấp bằng Ma trận

1. Nhân một hàng của ma trận cho số $\alpha \neq 0$ ($h_i \rightarrow \alpha \cdot h_i$)

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$. Ta nhân 1 hàng của A cho số $\alpha \neq 0$ bằng cách:

Nhân ma trận N_i bên trái của A với N_i là ma trận đơn vị có cấp là số hàng của A và thay phần tử $a_{ii} = \alpha$.

$$N_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Ví dụ $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha.a & \alpha.b & \alpha.c & \alpha.d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \alpha.e & \alpha.f & \alpha.g & \alpha.h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \alpha.i & \alpha.j & \alpha.k & \alpha.l \end{bmatrix}$$

2. Hoán đổi vị trí 2 hàng cho nhau ($h_i \leftrightarrow h_j$)

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$. Để hoán đổi 2 hàng của ma trận cho nhau, ta nhân bên trái của A với

các ma trận H_{ij} có được bằng cách: **đổi hàng i và j của ma trận đơn vị có cùng số hàng của A**.

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k & l \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

3. Cộng 1 hàng bởi α lần hàng khác ($h_j \rightarrow h_j + \alpha \cdot h_i$)

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$. Để cộng α lần hàng i vào hàng j ($h_j \rightarrow h_j + \alpha \cdot h_i$) bằng cách tạo ma trận

C_{ij} từ ma trận đơn vị và thay phần tử $c_{ij} = \alpha$.

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (cộng } \alpha \text{ lần hàng 1 vào hàng 2)}$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \alpha.a + e & \alpha.b + f & \alpha.c + g & \alpha.d + h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \alpha.a + i & \alpha.b + j & \alpha.c + k & \alpha.d + l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & \alpha.d + h \\ \alpha.e + i & \alpha.f + j & \alpha.g + k & \alpha.d + l \end{bmatrix}$$

4. Rút gọn ma trận

Xét ma trận $A = [a_{ij}]$. Để rút gọn 1 cột của ma trận A thành cột j của ma trận đơn vị ta dùng ma trận C_j là ma trận đơn vị và ta thay cột j bằng cột j của A chia cho phần tử $a_{jj} \neq 0$ trừ a_{jj} , sau đó đổi dấu các phần tử trên cột j khác vị trí hàng j , cột j là: $(C_j)_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{jj}}$ khi $k \neq j$ và $(C_j)_{jj} = \frac{1}{a_{jj}}$

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{a_{1j}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{a_{2j}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{nj}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

• Ma trận kết quả $C_j A$ được tính như sau:

* Cột j của $C_j A$ là cột j của ma trận đơn vị: $(C_j A)_{kj} = 0$ và $(C_j A)_{jj} = 1$

* Hàng j của $C_j A$ là hàng j của A chia cho a_{jj} : $(C_j A)_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{jj}}$ và $(C_j A)_{jj} = 1$

* Để tính các phần tử còn lại, ta lấy a_{ij} làm trụ và tính theo qui tắc nhân chéo và trừ nhau của phần tử của 4 đỉnh hình chữ nhật có đường chéo là a_{ij} và phần tử ở vị trí cần tính, rồi chia cho phần tử trụ a_{ij} .

Ví dụ Tính phần tử hàng m, cột k như sau:

$$\Rightarrow (C_j A)_{mk} = \frac{a_{jj} a_{mk} - a_{mj} a_{jk}}{a_{jj}}$$

a) Rút gọn cột 1 của: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{d}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{g}{a} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} & \frac{af-cd}{a} \\ 0 & \frac{ah-bg}{a} & \frac{ai-cg}{a} \end{bmatrix}$

b) Rút gọn cột 2 của: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{h}{e} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 A = \begin{bmatrix} \frac{ae-bd}{e} & 0 & \frac{ce-bf}{e} \\ \frac{e}{d} & 1 & \frac{f}{e} \\ \frac{eg-hd}{e} & 0 & \frac{ei-hf}{e} \end{bmatrix}$

c) Rút gọn cột 3 của: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{i} \\ 0 & 1 & -\frac{f}{i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{i} \end{bmatrix} \Rightarrow C_3 A = \begin{bmatrix} \frac{ai-cg}{i} & \frac{bi-ch}{i} & 0 \\ \frac{di-fg}{i} & \frac{ei-fh}{i} & 0 \\ \frac{g}{i} & \frac{h}{i} & 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ Rút gọn ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (dùng máy tính để nhân ma trận)

* Rút gọn cột 1 của A: $C_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = C_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 6 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$

* Rút gọn cột 2 của B: $C_2 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = C_2 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{12} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$

* Rút gọn cột 3 của C: $C_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{96} \\ 0 & 1 & \frac{7}{48} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow D = C_3 C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{32} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{8} \end{bmatrix}$

5. Ứng dụng

a) Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ 1: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

- Tồn tại A^{-1} : vì $\det(A) = -6$

- Tìm A^{-1} : Rút gọn ma trận $[A:I_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{* Rút gọn cột 1: } \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & | & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2 & | & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & | & -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{* Rút gọn cột 2: } \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & | & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2 & | & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & | & -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{* Rút gọn cột 3: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Chú ý: Ta có thể thực hiện phép nhân ma trận bằng máy tính Casio

Ví dụ 2: Cho $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$. Tính B^{-1}

Giải:

- Vì $\det(B)=1$ nên tồn tại B^{-1}

- Rút gọn ma trận $[B:I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ thành $[I_4:B^{-1}]$ theo từng cột của B:

* Cột 1: $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

* Cột 2: $\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

* Cột 3: $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$

* Cột 4: $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Phương pháp đơn hình trong bài toán qui hoạch tuyến tính

Ví dụ 3: $\text{Min } f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ thỏa:
$$\begin{cases} x_1 & & + x_4 & & + 6x_6 & = & 9 \\ 3x_1 & + x_2 & - 4x_3 & & & + 2x_6 & = & 2 \\ x_1 & & + 2x_3 & & + x_5 & + 2x_6 & = & 6 \\ x_i \geq 0 & (i=1,2,\dots,6) \end{cases}$$

* Bước 1 Ta tính các Δ_i ; rồi chọn và rút gọn cột $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bằng cách nhân ma trận như bên dưới:

	1	-1	1	1	1	-1	P.Án	C_j
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	1	0	0	1	0	6	9	1
	3	1	-4	0	0	2	2	-1
	1	0	2	0	1	2	6	1
Δ_i	-2	0	5	0	0	7	13	

$\theta_0 = \min\left\{\frac{9}{6}; \frac{2}{2}; \frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1$

* Bước 2 Ta rút gọn cột $\begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ như bên dưới:

	1	-1	1	1	1	-1	P.Án	C_j
$\begin{bmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	-8	-3	12	1	0	0	3	1
	3/2	1/2	-2	0	0	1	1	-1
	-2	-1	6	0	1	0	4	1
Δ_i	-25/2	-7/2	19	0	0	0	6	

$\theta_0 = \min\left\{\frac{3}{12}; \frac{4}{6}\right\} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

* Bước 3 Ta rút gọn cột $\begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ như bên dưới:

	1	-1	1	1	1	-1	P.Án	C_j
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	-2/3	-1/4	1	1/12	0	0	1/4	1
	1/6	0	0	1/6	0	1	3/2	-1
	2	1/2	0	-1/2	1	0	5/2	1
Δ_i	1/6	5/4	0	-19/12	0	0	5/4	

$\theta_0 = \min\left\{\frac{5/2}{1/2}\right\} = 5$

* Bước 4 Ta tính được các $\Delta_i \leq 0$ nên kết thúc

	1	-1	1	1	1	-1	P.Án	C_j
	1/3	0	1	1/12	1/2	0	3/2	
	1/6	0	0	1/6	0	1	3/2	
	4	1	0	-1/2	1	0	5	
Δ_i	-19/6	0	0	-1/3	-3/2	-1	-5	

Vậy $\text{Min } f = -5$ tại $(0; 5; 3/2; 0; 0; 3/2)$