# Phép biến đổi sơ cấp bằng Ma trận

**1. Nhân một hàng của ma trận cho số α≠0 ($h_i \to \alpha * h_i$)**

Xét ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$. Ta nhân 1 hàng của A cho số α ≠0 bằng cách:

Nhân ma trận $N_i$ <u>bên trái</u> của A với $N_i$ là ma trận đơn vị có cấp là <u>số hàng</u> của A và <u>thay phần tử</u> $\mathbf{a_{ii}}$=α.

$$N_1=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

<u>Ví dụ</u>

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha.a & \alpha.b & \alpha.c & \alpha.d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \alpha.e & \alpha.f & \alpha.g & \alpha.h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \alpha.i & \alpha.j & \alpha.k & \alpha.l \end{bmatrix}$$

**2. Hoán đổi vị trí 2 hàng cho nhau ($h_i \leftrightarrow h_j$)**

Xét ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$. Để hoán đổi 2 hàng của ma trận cho nhau, ta nhân bên trái của A vớ các ma trận $H_{ij}$ có được bằng cách: ***đổi hàng i và j của ma trận đơn vị có cùng số hàng của A.***

$$H_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_{13}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Ví dụ</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i & j & k & l \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

3. **Cộng 1 hàng bởi α lần hàng khác ($h_j \to h_j + \alpha * h_i$)**

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$. Để cộng <u>α lần hàng i</u> vào <u>hàng j</u> ($h_j \to h_j + \alpha * h_i$) bằng cách tạo ma trận <u>$C_{ij}$ từ ma trận đơn vị</u> và <u>thay phần tử $c_{ij} = \alpha$</u> .

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (cộng } \alpha \text{ lần hàng 1 vào hàng 2)}$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots$$

<u>Ví dụ</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \alpha.a + e & \alpha.b + f & \alpha.c + g & \alpha.d + h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \alpha.a + i & \alpha.b + j & \alpha.c + k & \alpha.d + l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & \alpha.d + h \\ \alpha.e + i & \alpha.f + j & \alpha.g + k & \alpha.d + l \end{bmatrix}$$

4. **Rút gọn ma trận**

Xét ma trận $A = [a_{ij}]$. Để *<u>rút gọn 1 cột</u>* của ma trận A *<u>thành cột j của ma trận đơn vị</u>* ta dùng ma trận $C_j$ là *ma trận đơn vị* và ta thay cột j bằng cột j của A chia cho phần tử trụ là $a_{jj} \neq 0$ trừ $a_{jj}$, sau đó đổi dấu các phần tử trên cột j khác vị trí hàng j, cột j là: $(C_j)_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{jj}}$ *khi* $k \neq j$ *và* $(C_j)_{jj} = \frac{1}{a_{jj}}$

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{a_{1j}}{a_{jj}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\frac{a_{1j}}{a_{jj}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{jj}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_{nj}}{a_{jj}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Ma trận <u>kết quả</u> $C_j A$ được tính như sau:
  - * Cột j của $C_j A$ là cột j của ma trận đơn vị: $(C_j A)_{kj} = 0$ và $(C_j A)_{jj} = 1$
  - * Hàng j của $C_j A$ là hàng j của A chia cho $a_{jj}$: $(C_j A)_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{jj}}$ *và* $(C_j A)_{jj} = 1$
  - * Để tính các phần tử còn lại, ta lấy $a_{jj}$ làm trụ và tính theo qui tắc *<u>nhân chéo</u>* và *<u>trừ nhau</u>* của phần tử của 4 đỉnh hình chữ nhật có đường chéo là $a_{jj}$ và phần tử ở vị trí cần tính, rồi chia cho phần tử trụ $a_{jj}$.

Ví dụ Tính phần tử hàng m, cột k như sau:

$$\begin{array}{ccc} a_{jj} & \cdots & a_{jk} \\ a_{mj} & \cdots & a_{mk} \end{array} \quad \Rightarrow \quad (C_j A)_{mk} = \frac{a_{jj}\,a_{mk} - a_{mj}\,a_{jk}}{a_{jj}}$$

a) Rút gọn cột 1 của: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{d}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{g}{a} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} & \frac{af-cd}{a} \\ 0 & \frac{ah-bg}{a} & \frac{ai-cg}{a} \end{bmatrix}$

b) Rút gọn cột 2 của: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{h}{e} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 A = \begin{bmatrix} \frac{ae-bd}{e} & 0 & \frac{ce-bf}{e} \\ \frac{d}{e} & 1 & \frac{f}{e} \\ \frac{eg-hd}{e} & 0 & \frac{ei-hf}{e} \end{bmatrix}$

c) Rút gọn cột 3 của $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{i} \\ 0 & 1 & -\frac{f}{i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{i} \end{bmatrix} \Rightarrow C_3 A = \begin{bmatrix} \frac{ai-cg}{i} & \frac{bi-ch}{i} & 0 \\ \frac{di-fg}{i} & \frac{ei-fh}{i} & 0 \\ \frac{g}{i} & \frac{h}{i} & 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ Rút gọn ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (*dùng máy tính để nhân ma trận*)

* Rút gọn cột 1 của *A*: $C_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = C_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 6 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$

* Rút gọn cột 2 của *B*: $C_2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = C_2 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{12} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -8 & -13 \end{bmatrix}$

* Rút gọn cột 3 của *C*: $C_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{96} \\ 0 & 1 & \frac{7}{48} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow D = C_2 C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{32} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{8} \end{bmatrix}$

## 5. Ứng dụng

### a) Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ 1: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

- Tồn tại $A^{-1}$: vì det($A$)= -6
- Tìm $A^{-1}$: Rút gọn ma trận [$A$:$I_3$]= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

* Rút gọn cột 1: $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

* Rút gọn cột 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

* Rút gọn cột 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Chú ý**: Ta có thể thực hiện phép nhân ma trận bằng máy tính Casio

Ví dụ 2: Cho $B=\begin{bmatrix}1&1&1&-3\\0&1&0&0\\1&1&2&-3\\2&2&4&-5\end{bmatrix}$. Tính $B^{-1}$

Giải:

- Vì det($B$)=1 nên tồn tại $B^{-1}$
- Rút gọn ma trận [$B$:$I_4$]= $\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&-3&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&2&-3&0&0&1&0\\2&2&4&-5&0&0&0&1\end{array}\right]$ thành [$I_4$:$B^{-1}$] theo từng cột của B:

$$\text{* Cột 1: } \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\-2&0&0&1\end{bmatrix}.\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&-3&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&2&-3&0&0&1&0\\2&2&4&-5&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&-3&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&2&1&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\text{* Cột 2: } \begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&-3&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&2&1&-2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&-3&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&2&1&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\text{* Cột 3: } \begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-2&1\end{bmatrix}.\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&-3&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&2&1&-2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-3&2&-1&-1&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&-2&1\end{array}\right]$$

$$\text{* Cột 4: } \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-3&2&-1&-1&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&-2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&-7&3\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&-2&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-7&3\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&-2&1\end{bmatrix}$$

## b) Phương pháp đơn hình trong bài toán qui hoạch tuyến tính

Ví dụ 3: Min f = $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ thỏa: $\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6 \\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, 6) \end{cases}$

* Bước 1 Ta tính các $\Delta_i$; rồi chọn và rút gọn cột $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bằng cách nhân ma trận như bên dưới:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

| | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | P.Án | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 | 9 | 1 |
| | 3 | 1 | -4 | 0 | 0 | 2 | 2 | -1 |
| | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 | 6 | 1 |
| $\Delta_i$ | -2 | 0 | 5 | 0 | 0 | 7 | 13 | |

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{9}{6}; \frac{2}{2}; \frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1$$

* Bước 2 Ta rút gọn cột $\begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ như bên dưới:

$$\begin{bmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

| | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | P.Án | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -8 | -3 | 12 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| | 3/2 | 1/2 | -2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| | -2 | -1 | 6 | 0 | 1 | 0 | 4 | 1 |
| $\Delta_i$ | -25/2 | -7/2 | 19 | 0 | 0 | 0 | 6 | |

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{3}{12}; \frac{4}{6}\right\} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

* Bước 3 Ta rút gọn cột $\begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ như bên dưới:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

| | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | P.Án | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -2/3 | -1/4 | 1 | 1/12 | 0 | 0 | 1/4 | 1 |
| | 1/6 | 0 | 0 | 1/6 | 0 | 1 | 3/2 | -1 |
| | 2 | 1/2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 5/2 | 1 |
| $\Delta_i$ | 1/6 | 5/4 | 0 | -19/12 | 0 | 0 | 5/4 | |

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{5/2}{1/2}\right\} = 5$$

* Bước 4 Ta tính được các $\Delta_I \leq 0$ nên kết thúc

| | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | P.Án | $C_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/3 | 0 | 1 | 1/12 | 1/2 | 0 | 3/2 | |
| | 1/6 | 0 | 0 | 1/6 | 0 | 1 | 3/2 | |
| | 4 | 1 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | 5 | |
| $\Delta_i$ | -19/6 | 0 | 0 | -1/3 | -3/2 | -1 | -5 | |

Vậy Min f = – 5 tại (0 ; 5 ; 3/2 ; 0; 0 ; 3/2)