

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. Dùng ma trận phần phụ đại số

* Cho $A_{n \times n}$ có $D = \det(A)$ và D_{ij} là định thức con của D bỏ đi hàng i cột j

* Ma trận $A_{n \times n}$ khả đảo $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \text{ với } A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải

* Tính $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & m \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 4m + 4$

* Nếu $m = -1$ thì $\det(A) = 0$ không tồn tại A^{-1}

* Nếu $m \neq -1$ thì $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ tồn tại, nên ta tính các phần phụ đại số A_{ij}

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & m \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & m \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2m \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & m \end{vmatrix} = 2m + 6 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & m \end{vmatrix} = -m \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4m+4} \begin{bmatrix} -8 & 2m & 4 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2m+6 & -m & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4m+4} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 2m+6 \\ 2m & -2 & -m \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (m \neq -1)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{m+1} & \frac{-2}{m+1} & \frac{m+3}{2(m+1)} \\ \frac{m}{2(m+1)} & \frac{-1}{2(m+1)} & \frac{-m}{4(m+1)} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \frac{-1}{2(m+1)} \end{bmatrix}$$

2. Dùng phép biến đổi sơ cấp

Nếu $\det(A) \neq 0$ ta tính A^{-1} bằng các rút gọn ma trận $[A_{n \times n} : I_n] \rightarrow [I_n : A^{-1}]$ với I là ma trận đơn vị.

Ví dụ Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải

* Vì A là ma trận tam giác trên nên $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ tồn tại A^{-1}

* Ta tìm A^{-1} bằng rút gọn theo dòng ma trận $[A : I]$ sao cho A thành I thì I thành A^{-1}

$$\begin{aligned}
 [A : I] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{h1 \rightarrow h1 - 3h2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} h2 \rightarrow h2 + h3 \\ h1 \rightarrow h1 - 5h3 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} h3 \rightarrow h3 - 3 + h4 \\ h2 \rightarrow h2 - 2h4 \\ h1 \rightarrow h1 + 11h4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I : A^{-1}] \\
 \Rightarrow A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ta có thể rút gọn ma trận bằng cách nhân ma trận C_j như sau:

Xét ma trận $A = [a_{ij}]$. Để rút gọn cột j của ma trận A thành cột j của ma trận đơn vị ta dùng ma trận C_j là ma trận đơn vị và ta thay cột j bằng cột j của A chia cho phần tử trụ là $a_{jj} \neq 0$ trừ a_{ij} , sau đó đổi dấu các phần tử trên cột j khác vị trí hàng j , cột j :

$$(C_j)_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{jj}} \text{ khi } k \neq j \text{ và } (C_j)_{jj} = \frac{1}{a_{jj}}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{1j}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\frac{a_{2j}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -\frac{a_{3j}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{n-1j}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{nj}}{a_{jj}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

cột $j \downarrow$

Ví dụ Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải

* Cột 1 của A là cột 1 của ma trận đơn vị, nên không cần rút gọn.

* Rút gọn cột 2, ta nhân ma trận $[A : I]$ cho ma trận $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ta được:

$$\begin{array}{ccc} C_2 & [A : I] & [A_I : I_I] \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

* Rút gọn cột 3, ta nhân ma trận $[A : I]$ cho ma trận $C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ta được:

$$\begin{array}{ccc} C_3 & [A_I : I_I] & [A_2 : I_2] \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & | & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

* Rút gọn cột 4, ta nhân ma trận $[A : I]$ cho ma trận $C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ta được:

$$\begin{array}{ccc} C_4 & [A_I : I_I] & [A_2 : I_2] \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & | & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Dùng định lý Haminton-Cayley

a) Đa thức đặc trưng của ma trận $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ là: $f(x) = \det(xI - A)$

• **Tổng quát:** Tính đa thức đặc trưng của ma trận A là $f(x)$ bằng công thức Bocher như sau:

• Đặt $S_p = \text{tr}(A^p)$ với $\text{tr}(A^p) =$ tổng phần tử trên đường chéo chính của A^p

• Tính $a_1 = -S_1 = -\sum_{k=1}^n a_{kk}$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 S_1 + S_2)$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 S_1 + a_1 S_2 + S_3)$$

.....

$$a_n = -\frac{1}{n}(a_{n-1} S_1 + a_{n-2} S_2 + \dots + a_1 S_{n-1} + S_n)$$

• Đa thức đặc trưng của A : $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

• **Trường hợp riêng**

Nếu $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thì $f(x) = \begin{vmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$$

Nếu $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ thì $f(x) = \begin{vmatrix} x-a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & x-b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x-c_3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - \text{tr}(A)x^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x - \det(A)$$

(3 định thức cấp 2 theo đường chéo A)

Ví dụ Tính đa thức đặc trưng của $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

* Tính S_p : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow S_1 = \text{tr}(A) = 2+0+5 = \mathbf{7}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 11 & 11 & 15 \\ 25 & 17 & 37 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 = \text{tr}(A^2) = 3+11+37 = \mathbf{51}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -5 & -15 & -21 \\ 78 & 49 & 108 \\ 178 & 123 & 236 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3 = \text{tr}(A^3) = -5+49+236 = \mathbf{280}$$

* Tính hệ số a_i : $a_1 = -S_1 = -7$ $a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 S_1 + S_2) = -1$ $a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 S_1 + a_1 S_2 + S_3) = 28$

Đa thức đặc trưng của A là: $f(x) = x^3 - 7x^2 - x + 28$

b) Định lý Cayley-Hamilton

Nếu $f(x)$ là đa thức đặc trưng của *ma trận vuông* A thì $f(A)=0$

Giả sử cho A khả đảo ($\det(A) \neq 0$) có đa thức đặc trưng $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ thì $A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_n = O$ và $\mathbf{a_n} = (-1)^n \det(A) \neq 0$, ta nhân 2 vế cho A^{-1} được:

$$A^{n-1} + a_1A^{n-2} + a_2A^{n-3} + \dots + a_{n-1}I + a_nA^{-1} = O \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + a_2A^{n-3} + \dots + a_{n-1}I)$$

Ví dụ Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải

* $\det(A) = 1 \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}

* Tính đa thức đặc trưng của $A: f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^4$

$\Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

* Tính $A^{-1}: A^{-1} = -(A^3 - 4A^2 + 6A - 4I)$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Dùng ma trận khối

Giả sử ma trận $E_{n \times n}$ khả đảo ($\det(E) \neq 0$) với $n \geq 4$, ta tìm ma trận nghịch đảo E^{-1} như sau:

Đầu tiên ta chia E thành ma trận khối $E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ với $A_{m \times m}$, $D_{k \times k}$; $m+k=n$ và A khả đảo.

Tiếp theo, ta tìm E^{-1} dưới dạng $E^{-1} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$ trong đó K, N là ma trận vuông có cấp m, k

$$\Rightarrow E^{-1} \cdot E = I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} KA + LC = I_m & (1) \\ MA + NC = O & (2) \\ KB + LD = O & (3) \\ MB + ND = I_k & (4) \end{cases} \quad (I)$$

(i) Nếu $C=O$ thì hệ (I) cho:
$$\begin{cases} KA = I_m \\ MA = O \\ KB + LD = O \\ MB + ND = I_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = A^{-1} \\ M = O \\ A^{-1}B + LD = O \\ ND = I_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = A^{-1} \\ M = O \\ L = -A^{-1}BD^{-1} \\ N = D^{-1} \end{cases}$$

(ii) Nếu $B=O$ thì hệ (I) cho: $K = A^{-1}$; $M = -D^{-1}CA^{-1}$; $L = O$; $N = D^{-1}$

↓ nhân A^{-1} và D^{-1} hai bên B

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

↑ nhân D^{-1} và A^{-1} hai bên C

Áp dụng:

Ví dụ: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác trên $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

* $\det(E)=1 \Rightarrow$ tồn tại E^{-1}

* Ta chia thành ma trận khối như sau: $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = O \quad \text{và} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad -A^{-1}BD^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác dưới: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

* $\det(E) = -2$ nên tồn tại E^{-1}

* $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = O \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0,5 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad -D^{-1}CA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) Trường hợp tổng quát B và C khác O thì:

* Phân tích $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & O \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix}$ (tích 2 ma trận tam giác)

* Dùng kết quả: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}$

Ví dụ: Tính ma trận nghịch đảo của $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

* Phân tích $E = E_1 E_2$ với E_1, E_2 là 2 ma trận tam giác:

$D^{-1}C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E_1 = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{-17}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$

$E_2 = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ D^{-1}C & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

* $E^{-1} = E_2^{-1} E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{-17}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{-17}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$