MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. Dùng ma trận phần phụ đại số

> * Cho A_{nxn} có D=det(A) và D_{ij} là định thức con của D bỏ đi hàng i cột j
>
> * Ma trận A_{nxn} khả đảo $\Leftrightarrow$ det(A)$\neq$0
>
> $$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}^T$$ với $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$

Ví dụ: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải

* Tính $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 0 & -4 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & m \\ -4 & -2\end{vmatrix}=4m+4$

* Nếu m= -1 thì det(A)=0 không tồn tại A^{-1}

* Nếu m$\neq$ -1 thì det(A) $\neq$0 $\Rightarrow$ A^{-1} tồn tại, nên ta tính các phần phụ đại số A_{ij}

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & m \\ 0 & 4\end{vmatrix}=-8 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & m \\ 2 & 4\end{vmatrix}=2m \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0\end{vmatrix}=4$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4\end{vmatrix}=-8 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0\end{vmatrix}=4$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & m\end{vmatrix}=2m+6 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & m\end{vmatrix}=-m \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4m+4}\begin{bmatrix} -8 & 2m & 4 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2m+6 & -m & -2\end{bmatrix}^T=\frac{1}{4m+4}\begin{bmatrix} -8 & -8 & 2m+6 \\ 2m & -2 & -m \\ 4 & 4 & -2\end{bmatrix} \quad (m\neq -1)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-2}{m+1} & \frac{-2}{m+1} & \frac{m+3}{2(m+1)} \\ \frac{m}{2(m+1)} & \frac{-1}{2(m+1)} & \frac{-m}{4(m+1)} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \frac{-1}{2(m+1)}\end{bmatrix}$$

2. Dùng phép biến đổi sơ cấp

Nếu det(A)≠0 ta tính A^{-1} bằng các rút gọn ma trận $[A_{nxn} : I_n] \to [I_n : A^{-1}]$ với I là ma trận đơn vị.

<u>Ví dụ</u> Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

<u>Giải</u>

* Vì A là <u>ma trận tam giác trên</u> nên det(A)=1≠0 ⇒ tồn tại A^{-1}

* Ta tìm A^{-1} bằng rút gọn theo dòng ma trận [A:I] sao cho A thành I thì I thành A^{-1}

$$[A:I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{h1 \to h1 - 3h2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[h1 \to h1 - 5h3]{h2 \to h2 + h3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{h3 \to h3 - 3 + h4 \\ h2 \to h2 - 2h4 \\ h1 \to h1 + 11h4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I : A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có thể rút gọn ma trận bằng cách nhân ma trận C_j như sau:

Xét ma trận A=[a_{ij}]. Để *<u>rút gọn cột j</u>* của ma trận A *<u>thành cột j của ma trận đơn vị</u>* ta dùng ma trận C_j là *ma trận đơn vị* và ta thay cột j bằng cột j của A chia cho phần tử trụ là $a_{jj} \neq 0$ trừ a_{jj}, sau đó đổi dấu các phần tử trên cột j khác vị trí hàng j, cột j: $(C_j)_{kj} = -\dfrac{a_{kj}}{a_{jj}}$ *khi* $k \neq j$ *và* $(C_j)_{jj} = \dfrac{1}{a_{jj}}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & & \text{cột j} \downarrow & & & \end{array} \\ C_j = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{a_{1j}}{a_{ij}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -\frac{a_{2j}}{a_{ij}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & -\frac{a_{3j}}{a_{ij}} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{jj}} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{a_{n-1j}}{a_{jj}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots. & -\frac{a_{nj}}{a_{jj}} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ví dụ Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải

* Cột 1 của A là cột 1 của ma trận đơn vị, nên không cần rút gọn.

* Rút gọn cột 2, ta nhân ma trận $[A : I]$ cho ma trận $C_2=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ta được:

$$\rightarrow \overset{C_2}{\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}} \overset{[\,A : I\,]}{\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]} \rightarrow \overset{[\,A_1 : I_1\,]}{\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}$$

* Rút gọn cột 3, ta nhân ma trận $[A : I]$ cho ma trận $C_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ta được:

$$\rightarrow \overset{C_3}{\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}} \overset{[\,A_1 : I_1\,]}{\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]} \rightarrow \overset{[\,A_2 : I_2\,]}{\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & -11 & 1 & -3 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}$$

* Rút gọn cột 4, ta nhân ma trận $[A : I]$ cho ma trận $C_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 11\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ta được:

$$\rightarrow \overset{C_4}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 11\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}} \overset{[\,A_1 : I_1\,]}{\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]} \rightarrow \overset{[\,A_2 : I_2\,]}{\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}$$

3. Dùng định lý Haminton-Cayley

a) Đa thức đặc trưng của ma trận A_{nxn}=[a_{ij}] là: $f(x) = \det(xI - A)$

• ***Tổng quát***: Tính đa thức đặc trưng của ma trận *A là f*(*x*) bằng công thức Bocher như sau:

• Đặt S_p= tr(A^p) với tr(A^p) = tổng phần tử trên đường chéo chính của A^p

• Tính $a_1 = -S_1 = -\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(a_1S_1 + S_2)$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}(a_2S_1 + a_1S_2 + S_3)$$

....

$$a_n = -\frac{1}{n}(a_{n-1}S_1 + a_{n-2}S_2 + ... + a_1S_{n-1} + S_n)$$

• Đa thức đặc trưng của A: $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

• ***Trường hợp riêng***

Nếu $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thì $f(x) = \begin{vmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$

Nếu $A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ thì $f(x) = \begin{vmatrix} x-a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & x-b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x-c_3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - tr(A)x^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x - \det(A)$$

(*3 định thức cấp 2 theo đường chéo A*)

<u>Ví dụ</u> Tính đa thức đặc trưng của $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

* Tính S_p: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow S_1 = \text{tr}(A) = 2+0+5 = \mathbf{7}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 11 & 11 & 15 \\ 25 & 17 & 37 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 = \text{tr}(A^2) = 3+11+37 = \mathbf{51}$

$A^3 = \begin{bmatrix} -5 & -15 & -21 \\ 78 & 49 & 108 \\ 178 & 123 & 236 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3 = \text{tr}(A^3) = -5+49+236 = \mathbf{280}$

* Tính hệ số a_i: $a_1 = -S_1 = -7$ $a_2 = -\frac{1}{2}(a_1S_1 + S_2) = -1$ $a_3 = -\frac{1}{3}(a_2S_1 + a_1S_2 + S_3) = 28$

Đa thức đặc trưng của *A* là: $f(x) = x^3 - 7x^2 - x + 28$

b) Định lý Cayley-Hamilton

$\boxed{\text{Nếu } f(x) \text{ là đa thức đặc trưng của \underline{ma trận vuông} } A \text{ thì } f(A)=0}$

Giả sử cho A khả đảo ($\det(A)\neq 0$) có đa thức đặc trưng $f(x)= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ thì $A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}A + a_n= O$ và $\mathbf{a_n=(-1)^n\det(}\boldsymbol{A}\mathbf{)}\neq 0$, ta nhân 2 vế cho A^{-1} được:

$A^{n-1} + a_1A^{n-2} + a_2A^{n-3} + \ldots + a_{n-1}I + a_nA^{-1} = O \Rightarrow$ $\boxed{A^{-1} = -\dfrac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + a_2A^{n-3} + \ldots + a_{n-1}I)}$

Ví dụ Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải

* $\det(A)=1\neq 0$ nên tồn tại A^{-1}

* Tính đa thức đặc trưng của A: $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^4$

$\Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

* Tính A^{-1} : $A^{-1} = -(A^3 - 4A^2 + 6A - 4I)$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Dùng ma trận khối

Giả sử ma trận $E_{n\times n}$ khả đảo ($\det(E)\neq 0$) với $n\geq 4$, ta tìm ma trận nghịch đảo E^{-1} như sau:

Đầu tiên ta chia E thành ma trận khối $E=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$ với A_{mxm}, D_{kxk} ; m+k=n và A khả đảo.

Tiếp theo, ta tìm E^{-1} dưới dạng $E^{-1}=\begin{bmatrix} K & L \\ M & N\end{bmatrix}$ trong đó K, N là ma trận vuông có cấp m, k

$$\Rightarrow E^{-1}.E=I_n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K & L \\ M & N\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_k\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} KA+LC=I_m & (1) \\ MA+NC=O & (2) \\ KB+LD=O & (3) \\ MB+ND=I_k & (4)\end{cases} \quad (I)$$

(i) Nếu C=O thì hệ (I) cho: $\begin{cases} KA=I_m \\ MA=O \\ KB+LD=O \\ MB+ND=I_k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K=A^{-1} \\ M=O \\ A^{-1}B+LD=O \\ ND=I_k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K=A^{-1} \\ M=O \\ L=-A^{-1}BD^{-1} \\ N=D^{-1}\end{cases}$

(ii) Nếu B=O thì hệ (I) cho: $K=A^{-1}$; $M=-D^{-1}CA^{-1}$; $L=O$; $N=D^{-1}$

↓ nhân A^{-1} và D^{-1} hai bên B

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ O & D\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & O \\ C & D\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1}\end{bmatrix}}$$

↑ nhân D^{-1} và A^{-1} hai bên C

Áp dụng:

Ví dụ: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác trên $E=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

* det(E)=1 $\Rightarrow$ tồn tại E^{-1}

* Ta chia thành ma trận khối như sau: $E=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \; B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad C=O \text{ và } D=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \; D^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ và } -A^{-1}BD^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Ví dụ:Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác dưới: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

* det(E)= -2 nên tồn tại E^{-1}

* $E = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = O \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad và\ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad và\ -D^{-1}CA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0{,}5 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

(iii) Trường hợp tổng quát B và C khác O thì:

* Phân tích $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & O \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix}$ (tích 2 ma trận tam giác)

* Dùng kết quả: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}$

Ví dụ: Tính ma trận nghịch đảo của $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

* Phân tích $E = E_1E_2$ với E_1, E_2 là 2 ma trận tam giác:

$$D^{-1}C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ A - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{-17}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ D^{-1}C & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* $E^{-1} = E_2^{-1}E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{-17}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{-17}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$