HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

=====📖=====

SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

TOÁN CAO CẤP (A2)

(Dùng cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa)

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2006

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

1. GIỚI THIỆU CHUNG:

Toán cao cấp A_1, A_2, A_3 là chương trình toán đại cương dành cho sinh viên các nhóm ngành toán và nhóm ngành thuộc khối kỹ thuật. Nội dung của toán cao cấp A_1, A_3 chủ yếu là phép tính vi tích phân của hàm một hoặc nhiều biến, còn toán cao cấp A_2 là các cấu trúc đại số và đại số tuyến tính. Có khá nhiều sách giáo khoa và tài liệu tham khảo viết về các chủ đề này. Tuy nhiên với phương thức đào tạo từ xa có những đặc thù riêng, đòi hỏi học viên làm việc độc lập nhiều hơn, do đó cần phải có tài liệu hướng dẫn học tập thích hợp cho từng môn học. Tập tài liệu hướng dẫn học môn toán cao cấp A_2 này được biên soạn cũng nhằm mục đích trên.

Tập tài liệu này được biên soạn theo chương trình qui định năm 2001 của Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông. Nội dung của cuốn sách bám sát các giáo trình của các trường đại học kỹ thuật, giáo trình dành cho hệ chính qui của Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông biên soạn năm 2001 và theo kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của tác giả. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập,tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường, các ngành đại học và cao đẳng.

Giáo trình được trình bày theo cách thích hợp đối với người tự học, đặc biệt phục vụ đắc lực cho công tác đào tạo từ xa. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương để thấy được mục đích ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Đặc biệt bạn đọc nên chú ý đến các nhận xét, bình luận để hiểu sâu hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả. Hầu hết các bài toán được xây dựng theo lược đồ: đặt bài toán, chứng minh sự tồn tại lời giải bằng lý thuyết và cuối cùng nêu thuật toán giải quyết bài toán này. Các ví dụ là để minh hoạ trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người đọc dễ dàng hơn khi tiếp thu bài học. Sau các chương có phần tóm tắt các nội dung chính và cuối cùng là các câu hỏi luyện tập. Có khoảng từ 30 đến 40 bài tập cho mỗi chương, tương ứng vói 3 -5 câu hỏi cho mỗi tiết lý thuyết. Hệ thống câu hỏi này bao trùm toàn bộ nội dung vừa được học. Có những câu kiểm tra trực tiếp các kiến thức vừa được học nhưng cũng có những câu đòi hỏi học viên phải vận dụng một cách tổng hợp và sáng tạo các kiến thức để giải quyết. Vì vậy việc giải các bài tập này giúp học viên nắm chắc hơn lý thuyết và kiểm tra được mức độ tiếp thu lý thuyết của mình.

Các bài tập được cho dưới dạng trắc nghiệm khách quan, đây là một phương pháp rất phù hợp với hình thức đào tạo từ xa. Học viên có thể tự kiểm tra và đối chiếu với đáp án ở cuối sách. Tuy nhiên phương pháp trắc nghiệm cũng có những mặt hạn chế của nó, chẳng hạn phương pháp này không thể hiện được khả năng trình bày kết quả, khả năng lập luận, mà đây là một trong những yêu cầu chính của việc học toán. Một bài toán có thể giải cho đúng kết quả nhưng cách giải sai thậm chí sai cả về bản chất. Hai lần sai dấu trừ biến thành dấu cộng và cho kết quả đúng nhưng thực chất là sai. Mặt khác có thể giải bài toán trắc nghiệm bằng cách thử các trường hợp và loại trừ, nhưng cách làm này khá tiêu cực. Để khắc phục những hạn chế của phương pháp kiểm tra trắc nghiệm chúng tôi khuyên người đọc nên tự giải quyết các bài toán theo phương pháp tự luận, sau đó mới đối chiếu với các trường hợp a, b, c, d để chọn phương án đúng.

Giáo trình gồm 7 chương tương ứng với 4 đơn vị học trình (60 tiết):

Chương I: Lô gích toán học, lý thuyết tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số.

Chương II: Không gian véc tơ.

Chương III: Ma trận.

Chương IV: Định thức.

Chương V: Hệ phương trình tuyến tính

Chương VI: Ánh xạ tuyến tính.

Chương VII: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương.

Ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, toán học còn được xem là một ngành khoa học có phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Các phương pháp này đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông, nhưng trong chương I các vấn đề này được hệ thống hoá lại. Nội dung của chương I được xem là cơ sở, ngôn ngữ của toán học hiện đại. Một vài nội dung trong chương này đã được học ở phổ thông nhưng chỉ với mức độ đơn giản. Các cấu trúc đại số thì hoàn toàn mới và khá trừu tượng vì vậy đòi hỏi học viên phải đọc lại nhiều lần mới tiếp thu được.

Các chương còn lại của giáo trình là đại số tuyến tính. Kiến thức của các chương liên hệ chặt chẽ với nhau, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy học viên cần thấy được mối liên hệ này. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và trừu tượng cao. Các khái niệm thường được khái quát hoá từ những kết quả của hình học giải tích ở phổ thông. Khi học ta nên liên hệ đến các kết quả đó.

2. MỤC ĐÍCH MÔN HỌC

Cung cấp cho sinh viên các kiến thức cơ bản về đại số : Mệnh đề, tập hợp, ánh xạ , cấu trúc đại số và đại số tuyến tính bao gồm các khái niệm về không gian vecto, ma trận, định thức, ánh xạ tuyến tính, dạng song tuyến tính, dạng toàn phương..., làm cơ sở để tiếp thu các môn kỹ thuật điện và điện tử.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU MÔN HỌC

Để học tốt môn học này, sinh viên cần lưu ý những vấn đề sau :

1- Thu thập đầy đủ các tài liệu :

◊ Bài giảng: *Toán cao cấp A2. Lê Bá Long, Nguyễn Phi Nga*, Học viện Công nghệ BCVT, 2005.

◊ Sách hướng dẫn học tập và bài tập: *Toán cao cấp A2. Lê Bá Long, Nguyễn Phi Nga*, Học viện Công nghệ BCVT, 2005.

Nếu có điều kiện, sinh viên nên tham khảo thêm: Các tài liệu tham khảo trong mục Tài liệu tham khảo ở cuối cuốn sách này.

2- Đặt ra mục tiêu, thời hạn cho bản thân:

✓ *Đặt ra mục các mục tiêu tạm thời và thời hạn cho bản thân, và cố gắng thực hiện chúng*

Cùng với lịch học, lịch hướng dẫn của Học viện của môn học cũng như các môn học khác, sinh viên nên tự đặt ra cho mình một kế hoạch học tập cho riêng mình. Lịch học này mô tả về các tuần học (tự học) trong một kỳ học và đánh dấu số lượng công việc cần làm. Đánh dấu các ngày khi sinh viên phải thi sát hạch, nộp các bài luận, bài kiểm tra, liên hệ với giảng viên.

✓ *Xây dựng các mục tiêu trong chương trình nghiên cứu*

Biết rõ thời gian nghiên cứu khi mới bắt đầu nghiên cứu và thử thực hiện, cố định những thời gian đó hàng tuần. Suy nghĩ về thời lượng thời gian nghiên cứu để "*Tiết kiệm thời gian*". "*Nếu bạn mất quá nhiều thì giờ nghiên cứu*", bạn nên xem lại kế hoạch thời gian của mình.

3- Nghiên cứu và nắm những kiến thức đề cốt lõi:

Sinh viên nên đọc qua sách hướng dẫn học tập trước khi nghiên cứu bài giảng môn học và các tài liệu tham khảo khác. Nên nhớ rằng việc học thông qua đọc tài liệu là một việc đơn giản nhất so với việc truy cập mạng Internet hay sử dụng các hình thức học tập khác.

Hãy sử dụng thói quen sử dụng bút đánh dấu dòng (highline maker) để đánh dấu các đề mục và những nội dung, công thức quan trọng trong tài liệu.

4- Tham gia đầy đủ các buổi hướng dẫn học tập:

Thông qua các buổi hướng dẫn học tập này, giảng viên sẽ giúp sinh viên nắm được những nội dung tổng thể của môn học và giải đáp thắc mắc; đồng thời sinh viên cũng có thể trao đổi, thảo luận của những sinh viên khác cùng lớp. Thời gian bố trí cho các buổi hướng dẫn không nhiều, do đó đừng bỏ qua những buổi hướng dẫn đã được lên kế hoạch.

5- Chủ động liên hệ với bạn học và giảng viên:

Cách đơn giản nhất là tham dự các diễn đàn học tập trên mạng Internet. Hệ thống quản lý học tập (LMS) cung cấp môi trường học tập trong suốt 24 giờ/ngày và 7 ngày/tuần. Nếu không có điều kiện truy nhập Internet, sinh viên cần chủ động sử dụng hãy sử dụng dịch vụ bưu chính và các phương thức truyền thông khác (điện thoại, fax,...) để trao đổi thông tin học tập.

6- Tự ghi chép lại những ý chính:

Nếu chỉ đọc không thì rất khó cho việc ghi nhớ. Việc ghi chép lại chính là một hoạt động tái hiện kiến thức, kinh nghiệm cho thấy nó giúp ích rất nhiều cho việc hình thành thói quen tự học và tư duy nghiên cứu.

7 -Trả lời các câu hỏi ôn tập sau mỗi chương, bài.

Cuối mỗi chương, sinh viên cần tự trả lời tất cả các câu hỏi. Hãy cố gắng vạch ra những ý trả lời chính, từng bước phát triển thành câu trả lời hoàn thiện.

Đối với các bài tập, sinh viên nên tự giải trước khi tham khảo hướng dẫn, đáp án. Đừng ngại ngần trong việc liên hệ với các bạn học và giảng viên để nhận được sự trợ giúp.

Nên nhớ thói quen đọc và ghi chép là chìa khoá cho sự thành công của việc tự học!

CHƯƠNG 1: MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

1.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Đây là chương mở đầu làm cơ sở, làm ngôn ngữ và công cụ không những cho toán học mà còn cho các ngành khoa học khác.

Ta biết rằng toán học là một ngành khoa học lý thuyết được phát triển trên cơ sở tuân thủ nghiêm ngặt các qui luật lập luận của tư duy lôgich hình thức. Các qui luật cơ bản của lôgich hình thức đã được phát triển từ thời Aristote (Arít-xtốt) (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) cùng với sự phát triển rực rỡ của văn minh cổ Hy Lạp. Tuy nhiên mãi đến thế kỷ 17 với những công trình của De Morgan (Đờ Mocgan), Boole ... thì lôgích hình thức mới có một cấu trúc đại số đẹp đẽ và cùng với lý thuyết tập hợp giúp làm chính xác hoá các khái niệm toán học và thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ. Việc nắm vững lôgich hình thức giúp học viên không những học tốt môn toán mà còn có thể vận dụng trong thực tế và biết lập luận chính xác. Học tốt môn lôgich là cơ sở để học tốt đại số Boole, vận dụng để giải các bài toán về sơ đồ công tắc rơle, các sơ đồ điện và công nghệ thông tin. Yêu cầu của phần này là phải nắm vững khái niệm mệnh đề toán học, các phép toán liên kết mệnh đề và các tính chất của chúng.

Khái niệm tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (lớp 6). Khái niệm tập hợp được Cantor đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau. Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lôgich hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lôgích này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

Trên cơ sở tích Descartes (Đề-các) của hai tập hợp ta có khái niệm quan hệ hai ngôi mà hai trường hợp đặc biệt là quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự. Quan hệ tương đương được dùng để phân một tập nào đó thành các lớp không giao nhau, gọi là phân hoạch của tập đó. Quan hệ đồng dư môđulô p (modulo) là một quan hệ tương đương trong tập các số nguyên. Tập thương của nó là tập $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên môđulô p. Tập $\mathbb{Z}_p$ có nhiều ứng dụng trong lý thuyết mật mã, an toàn mạng. Quan hệ thứ tự được dùng để sắp xếp các đối tượng cần xét theo một thứ tự dựa trên tiêu chuẩn nào đó. Quan hệ $\leq$ trong các tập hợp số là các quan hệ thứ tự.

Khái niệm ánh xạ là sự mở rộng khái niệm hàm số đã được biết. Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

Sử dụng khái niệm ánh xạ và tập hợp ta khảo sát các vấn đề của giải tích tổ hợp, đó là các phương pháp đếm số phần tử. Giải tích tổ hợp được sử dụng để giải quyết các bài toán xác suất thống kê và toán học rời rạc.

Ta có thể thực hiện các phép toán cộng các số, hàm số, đa thức, véc tơ hoặc nhân các số, hàm số, đa thức... Như vậy ta có thể thực hiện các phép toán này trên các đối tượng khác nhau. Cái chung cho mỗi phép toán cộng hay nhân ở trên là các tính chất giao hoán, kết hợp, phân bố... Một tập hợp có phép toán thoả mãn điều kiện nào đó được gọi là có cấu trúc đại số tương ứng. Các cấu trúc đại số quan trọng thường gặp là nhóm, vành, trường, không gian véc tơ. Đại số học là một ngành của toán học nghiên cứu các cấu trúc đại số. Lý thuyết Nhóm được Evarist Galois (Galoa) đưa ra vào đầu thế kỉ 19 trong công trình "Trong những điều kiện nào thì một phương trình đại số có thể giải được?", trong đó Galoa vận dụng lý thuyết nhóm để giải quyết. Trên cơ sở lý thuyết nhóm người ta phát triển các cấu trúc đại số khác.

Việc nghiên cứu các cấu trúc đại số giúp ta tách ra khỏi các đối tượng cụ thể mà thấy được cái chung của từng cấu trúc để khảo sát các tính chất, các đặc trưng của chúng. Chẳng hạn, tập các ma trận vuông cùng cấp, các tự đồng cấu tuyến tính, các đa thức ... có cấu trúc vành không nguyên nên có những tính chất chung nào đó.

Các cấu trúc đại số có tính khái quát hoá và trừu tượng cao vì vậy người ta nghĩ rằng khó áp dụng vào thực tiễn. Tuy nhiên thực tế cho thấy đại số Boole được ứng dụng rất hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán về sơ đồ mạch điện, vào máy tính. Lý thuyết nhóm được ứng dụng vào cơ học lượng tử. Lý thuyết vị nhóm và vành được ứng dụng trong lý thuyết mật mã, lý thuyết Ôtômát.

1.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

1.2.1 Lôgíc mệnh đề

a. Mệnh đề

b. Liên kết mệnh đề:

- ✓ Phép phủ định: $\overline{p}$ đọc không p
- ✓ Phép hội: $p \wedge q$ đọc p và q
- ✓ Phép tuyển: $p \vee q$ đọc p hoặc q
- ✓ Phép kéo theo: $p \Rightarrow q$ đọc p kéo theo q, p suy ra q
- ✓ Phép tương đương: $p \Leftrightarrow q$ đọc p tương đương q
- ✓ Lượng từ phổ biến: $\forall$ đọc với mọi
- ✓ Lượng từ tồn tại: $\exists$ đọc tồn tại.

1.2.2 Tập hợp và phần tử

a. Tập hợp

- ✓ a là phần tử của A ký hiệu $a \in A$, đọc a thuộc A
- ✓ a không phải là phần tử của A ký hiệu $a \notin A$, đọc a không thuộc A.
- ✓ Tập rỗng ϕ
- ✓ Tập con: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- ✓ Tập bằng nhau $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$

b. Các phép toán trên tập hợp

- ✓ Hợp $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$
- ✓ Giao $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$
- ✓ Hiệu $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$
- ✓ Phần bù $A \subset X$, $\overline{A} = X \setminus A$
- ✓ Tập tất cả các tập con của X : $\mathscr{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$
- ✓ Tích đề các $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A,\ b \in B, c \in C\}$$

c. Quan hệ

- ✓ Quan hệ hai ngôi R trên X là tập con $\mathscr{R} \subset X \times X$, gọi là có tính:
  - o phản xạ nếu $x \mathscr{R} x, \forall x \in X$

- đối xứng nếu $x\mathcal{R}\, y \Rightarrow y\mathcal{R}\, x$
- bắc cầu nếu $x\mathcal{R}\, y \wedge y\mathcal{R}\, z \Rightarrow x\mathcal{R}\, z$
- phản đối xứng nếu $x\mathcal{R}\, y \wedge y\mathcal{R}\, x \Rightarrow x = y$

✓ Quan hệ hai ngôi R trên X được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có tính phản xạ đối xứng bắc cầu, ký hiệu ~.

✓ Lớp tương đương của y, ký hiệu $\bar{y} = \{x \in X \mid x \sim y\}$

✓ Quan hệ hai ngôi R trên X được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó có tính phản xạ phản đối xứng và bắc cầu, ký hiệu ≤.

✓ Quan hệ thứ tự ≤ trên X được gọi là quan hệ thứ tự toàn phần nếu hai phần tử bất kỳ x, y của X đều có thể so sánh được với nhau, nghĩa là $x \le y$ hoặc $y \le x$. Quan hệ thứ tự không toàn phần được gọi là quan hệ thứ tự bộ phận.

1.2.3 Ánh xạ

a. Ánh xạ: Ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho ứng mỗi $x \in X$ với một và chỉ một $y \in Y$, ký hiệu $f : X \to Y$,

b. Phân loại: $y = f(x)$ hoặc $x \mapsto y = f(x)$ được gọi là công thức xác định ảnh.

✓ f là một đơn ánh nếu $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

✓ f là một toàn ánh nếu $f(X) = Y$.

✓ f là một song ánh nếu f vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

✓ Nếu f là một song ánh thì có ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ xác định bởi: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ cũng là một song ánh.

c. Các phép toán

✓ Hợp của hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là ánh xạ $g \circ f : X \to Z$ xác định bởi $g \circ f(x) = g(f(x))$.

✓ Lực lượng của tập hợp : Hai tập hợp gọi là cùng lực lượng nếu có một song ánh từ tập này lên tập kia. Tập có cùng lực lượng với $\{1, 2, ..., n\}$

được gọi là tập hữu hạn có n phần tử. Tập rỗng là tập hữu hạn có 0 phần tử. Tập không hữu han được gọi là tập vô hạn.

- ✓ Tập cùng lực lượng với tập số tự nhiên ℕ được gọi là tập vô hạn đếm được. Tập số thực ℝ không đếm được.

1.2.4 Giải tích tổ hợp

- ✓ Số các hoán vị n phần tử là $P_n = n!$
- ✓ Số các chỉnh hợp lặp chập p của n phần tử là n^p
- ✓ Số các chỉnh hợp không lặp chập p của n phần tử là

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- ✓ Số các tổ hợp chập p của n phần tử là

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

- ✓ Nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + ... + C_n^0 b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

- ✓ Sơ lược về phép đếm
  - o Công thức cộng: $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$,
  - o Công thức nhân: $|A_1 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_k|$,
  - o Chỉnh hợp có lặp: $|\{f : A \to B\}| = |A|^{|B|}$, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
  - o Nếu $f : A \to B$ song ánh thì $|A| = |B|$.

1.2.5 Các cấu trúc đại số

Luật hợp thành trong, hay còn gọi là phép toán hai ngôi, trên tập X là một ánh xạ từ $X \times X$ vào X, ký hiệu $* : X \times X \to X$ $\quad (x, y) \mapsto x * y$

Luật hợp thành trong * của tập X được gọi là:

- ✓ Có tính kết hợp nếu $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$
- ✓ Có tính giao hoán nếu $\forall x, y \in X : x * y = y * x$

- ✓ Có phần tử trung hoà (hay có phần tử đơn vị) là $e \in X$ nếu $\forall x \in X : x * e = e * x = x$
- ✓ Giả sử $*$ có phần tử trung hoà $e \in X$. Phần tử $x' \in X$ được gọi là phần tử đối xứng của $x \in X$ nếu $x * x' = x' * x = e$.

Tập khác trống G với luật hợp thành * được gọi là một vị nhóm nếu * có tính kết hợp và có phần tử trung hoà.

- ✓ Vị nhóm là một nhóm nếu mọi phần tử của G đều có phần tử đối.
- ✓ Nếu * có tính giao hoán thì nhóm $(G,*)$ được gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel.

Vành $(A,+,\cdot)$, trong đó "$+,\cdot$" là hai luật hợp thành trong của $A \neq \phi$ thoả mãn:

- ✓ $(A,+)$ là một nhóm Abel,
- ✓ Luật nhân có tính kết hợp,
- ✓ Luật nhân có tính phân phối hai phía đối với luật cộng, nghĩa là:

  $\forall x, y, z \in A:\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ phân phối bên trái

  $\forall x, y, z \in A:\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ phân phối bên phải
- ✓ Nếu thoả mãn thêm điều kiện:

  Luật nhân có tính giao hoán thì $(A,+,\cdot)$ là vành giao hoán.

  Luật nhân có phần tử đơn vị là 1 thì $(A,+,\cdot)$ là vành có đơn vị.
- ✓ Vành không có ước của 0 được gọi là vành nguyên.

Trường là một vành giao hoán có đơn vị $(K,+,\cdot)$ sao cho mọi phần tử $x \neq 0$ của K đều khả nghịch (có phần tử đối của luật nhân).

- ✓ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ là trường.
- ✓ $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ là trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

1.2.6 Đại số Bool:

Đại số Boole $(B,\vee,\wedge,')$ là một tập khác trống B với hai phép toán hai ngôi $\vee,\wedge : B \times B \to B$ và phép toán một ngôi $' : B \to B$ thoả mãn các tiên đề sau:

- ✓ B1: $\vee,\wedge$ có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $a,b,c \in B$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,\ \ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

✓ B2: $\vee, \wedge$ có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $a, b \in B$

$$a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$$

✓ B3: Tồn tại các phần tử không và phần tử đơn vị $0, 1 \in B$ sao cho $0 \neq 1$ và với mọi $a \in B$ $\quad a \vee 0 = a,\ \ a \wedge 1 = a$

✓ B4: Với mọi $a \in B$ thì $a' \in B$ là phần tử đối theo nghĩa là:

$$a \vee a' = 1,\ \ a \wedge a' = 0$$

✓ B5: Luật $\vee$ phân phối đối với luật $\wedge$ và luật $\wedge$ phân phối đối với luật $\vee$, nghĩa là với mọi $a, b, c \in B$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Hai công thức Boole trong đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là đối ngẫu nếu trong một công thức ta thay $\vee, \wedge, 0, 1,$ bằng $\wedge, \vee, 1, 0$ thì ta được công thức hai.

Nguyên lý đối ngẫu: Nếu một công thức của đại số Boole được chứng minh là đúng dựa trên cơ sở hệ tiên đề B1-B5 thì công thức đối ngẫu của chúng cũng đúng.

Có thể áp dụng đại số Boole để giải quyết các bài toán về mạch điện, thiết kế một mạng thoả mãn những yêu cầu nào đó, rút gọn mạng điện...

1.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1: Hãy chọn câu trả lời đúng nhất;

a) "Mọi số nguyên tố đều là số lẻ có phải không?" là một mệnh đề lôgich toán học.

b) "Trái đất quay xung quanh mặt trời" không phải là một mệnh đề lôgich toán học.

c) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng.

d) Tất cả các ý trên đều sai.

Câu 2: Hãy chọn câu trả lời đúng nhất

a) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \equiv q$. b) $\overline{(p \Rightarrow q)} \equiv (p \wedge \overline{q})$.

c) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \equiv (p \Rightarrow r)$. d) Tất cả các ý trên đều đúng.

Câu 3: Cho tập A và phần tử x của A. Điều nào sau đây sai

a) $x \in A$. b) $x \subset A$. c) $\phi \in \mathscr{P}(A)$. d) $\phi \subset \mathscr{P}(A)$.

Câu 4: Giả sử A, B, C, D là tập con của E. Trường hợp nào sau đây là sai:

a) $A \setminus B = \phi$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

b) Nếu $A \subset B, C \subset D$ thì $A \cup C \subset B \cup D$, $A \cap C \subset B \cap D$.

c) $A \cup A \neq A$.

d) Nếu $A \cup C \subset A \cup B$, $A \cap C \subset A \cap B$ thì $C \subset B$.

Câu 5: Cho A, B là hai tập con của E. Hãy chọn câu trả lời đúng nhất:

a) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$.

c) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow \overline{B} \cup A = \phi$.

d) Tất cả các ý trên đều đúng.

Câu 6: Cho A, B là hai tập con của E. Hãy chọn câu trả lời đúng nhất:

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

d) Tất cả các ý trên đều đúng.

Câu 7: Giả sử A, B, C, D là tập con của E. Trường hợp nào sau đây là sai:

a) $A \cap B \neq \phi \Leftrightarrow (A \times B) \cap (B \times A) \neq \phi$.

b) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.

c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

d) Nếu $A \subset B, C \subset D$ thì $A \times C \subset B \times D$.

Câu 8: Trong các trường hợp sau đây trường hợp nào thì hai tập hợp A và B không bằng nhau

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x^2 + 2x > 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > \sqrt{2} - 1\right\}$.

b) A là tập mọi số thực ≥ 0, B là tập mọi số thực $\geq$ trị tuyệt đối của chính nó.

c) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x^3-a^3=x-a;\,|a|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $B=\{a,-2a\}$.

d) A là tập các số tự nhiên nguyên tố nhỏ hơn 15, $B=\{2,3,5,7,11,13\}$.

Câu 9: Quan hệ nào trong các trường hợp sau đây là quan hệ tương đương trong tập các số nguyên $\mathbb{Z}$.

a) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ chia hết cho b.

b) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ không nguyên tố với b.

c) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a,b)=1$ (a và b nguyên tố cùng nhau)

d) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a-b\,\vdots\, m$, trong đó $m\geq 2$ là một số tự nhiên cho trước.

Câu 10: Trong $\mathbb{R}$, xét quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ xác định bởi:

$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^3-b^3=a-b$.

Tìm lớp tương đương $\overline{a}$ của a trong các trường hợp sau:

a) Trị tuyệt đối của a thoả mãn: $|a|>2/\sqrt{3}$.

b) Trị tuyệt đối của a thoả mãn: $|a|=1/\sqrt{3}$.

c) Trị tuyệt đối của a thoả mãn: $|a|<2/\sqrt{3}$ và $|a|\neq 1/\sqrt{3}$.

d) Trị tuyệt đối của a thoả mãn: $|a|=2/\sqrt{3}$.

Câu 11: Quan hệ $\mathcal{R}$ nào trong các trường hợp sau đây là quan hệ thứ tự trong tập tương ứng

a) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b-a\geq 0,\ \forall a,b\in\mathbb{Z}$.

b) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\,\vdots\, a,\ \forall a,b\in\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Z}_+^*$ là tập các số nguyên dương.

c) $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\subset B,\ \forall A,B\in\mathcal{P}(X)$, trong đó $X\neq\phi$ là một tập cho trước

d) Tất cả các trường hợp trên đều là quan hệ thứ tự.

Câu 12: Tìm các ví dụ về tập được sắp $(E,\leq)$ và hai tập con $A,B\subset E$ thoả mãn:

a) Tồn tại $\sup A$ nhưng không tồn tại $\sup B$.

b) Tồn tại $\sup B$ nhưng không tồn tại $\sup A$.

c) Tồn tại $\sup A\notin A$ nhưng tồn tại $\max B$.

d) Tồn tại $\inf A$ nhưng không tồn tại $\sup A$.

Câu 13: Các ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nào sau đây là đơn ánh:

a) $f(x)=2|x|+5$.

b) $f(x)=x^3+x^2-5x$.

c) $f(x)=3x-2|x|$.

d) $f(x)=x^2+bx+c;\ b,c\in\mathbb{R}$.

Câu 14: Cho hai ánh xạ $f,g:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ xác định bởi:

$$f(n)=2n,\ \ g(n)=\begin{cases} n/2 & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ (n-1)/2 & \text{nếu } n \text{ lẻ}\end{cases}$$

Hãy xác định:

a) $f\circ g$.

b) $g\circ f$.

c) $f\circ f$.

d) $f\circ g\circ f$.

Câu 15: Giả sử A,B,C,D là tập con của X.

Đặt $I_A(x)=\begin{cases}1 & \text{nếu } x\in A\\ 0 & \text{nếu } x\notin A\end{cases}$ và gọi là hàm đặc trưng của tập A.

Hãy chọn câu trả lời đúng nhất:

a) $I_A\cdot I_A=I_A$; $I_{X\setminus A}=1-I_A$.

b) $I_{A\cap B}=I_A\cdot I_B$; $I_{A\cup B}=I_A+I_B-I_A\cdot I_B$.

c) $A\subset B\Leftrightarrow I_A\le I_B$.

d) Tất cả các ý trên đều đúng.

Câu 16: Cho ánh xạ $f:X\to Y$ và $A,B\subset X$. Điều nào sau đây luôn luôn đúng:

a) $A\subset B\Leftrightarrow f(A)\subset f(B)$.

b) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

c) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

d) $f(B\setminus A)=f(B)\setminus f(A)$.

Câu 17: Cho ánh xạ $f:X\to Y$ và $C,D\subset Y$. Điều nào sau đây không luôn luôn đúng:

a) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

b) $C\subset D\Leftrightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.

c) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Câu 18: Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$.

Điều nào sau đây không luôn luôn đúng:

a) f, g đơn ánh thì h đơn ánh. b) f, g toàn ánh thì h toàn ánh.

c) h đơn ánh thì g đơn ánh. d) h toàn ánh thì g toàn ánh.

Câu 19: Ký hiệu $h = g \circ f$ là hợp của hai ánh xạ $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$.

Điều nào sau đây không luôn luôn đúng:

a) h đơn ánh thì f đơn ánh.

b) h toàn ánh thì f toàn ánh.

c) h đơn ánh và f toàn ánh thì g đơn ánh.

d) h toàn ánh và g đơn ánh thì f toàn ánh.

Câu 20: Cho hai phép thế của tập $\{1,2,3,4\}$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.\ \text{Tìm:}$$

a) $\sigma \circ \mu$. b) $\mu \circ \sigma$. c) σ^{-1}. d) μ^{-1}.

Câu 21: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số:

a) Gồm 4 chữ số khác nhau.

b) Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau.

c) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau.

d) Số chẵn gồm chữ số bất kỳ.

Câu 22: Tính giá trị $A = \dfrac{7!4!}{10!}\left(\dfrac{8!}{3!5!} - \dfrac{9!}{2!7!}\right)$

a) $A = \dfrac{4}{5}$. b) $A = \dfrac{5}{4}$. c) $A = \dfrac{2}{3}$. d) $A = \dfrac{6}{7}$.

Câu 23: Tìm tất cả các số tự nhiên dương $m \geq 1$ thoả mãn $\dfrac{m! - (m-1)!}{(m+1)!} = \dfrac{1}{6}$

a) $m = 4$. b) $m = 1, m = 4$. c) $m = 3, m = 4$. d) $m = 2, m = 3$.

Câu 24: Mười người bạn đi xem phim, cùng ngồi một hàng ghế, chơi trò đổi chỗ cho nhau. Cho rằng một lần đổi chỗ mất hết một phút, hỏi thời gian họ đổi chỗ cho nhau là bao nhiêu?

a) Hết 10 ngày đêm. b) Hết 100 ngày đêm.

c) Hết 1670 ngày đêm. d) Hết 2520 ngày đêm.

Câu 25: Một hợp tác xã có 225 xã viên. Họ muốn bầu một người làm chủ nhiệm, một thư ký, một thủ quỹ mà không kiêm nhiệm. Giả sử mọi xã viên đều có khả năng được chọn như nhau, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

a) Có 12600 cách. b) Có 13800 cách.

c) Có 14580 cách. d) Có 13680 cách.

Câu 26: Một hợp tác xã có 225 xã viên. Họ muốn bầu một hội đồng quản trị gồm một chủ nhiệm, một thư ký, một thủ quỹ mà không kiêm nhiệm. Giả sử mọi xã viên đều có khả năng được chọn như nhau, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

a) Có 2100 cách. b) Có 2300 cách.

c) Có 4860 cách. d) Có 2280 cách.

Câu 27: Một cái hộp đựng 10 quả cầu trong đó có 7 quả cầu trắng và 3 quả cầu đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách:

a) Lấy ra 4 quả cầu từ hộp.

b) Lấy ra 4 quả cầu, trong đó có đúng 2 quả cầu đỏ.

c) Lấy ra 4 quả cầu, trong đó có nhiều nhất 2 quả cầu đỏ.

d) Lấy ra 4 quả cầu, trong đó có ít nhất 2 quả cầu đỏ.

Câu 28: Hãy chọn câu trả lời đúng nhất:

a) $C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}=C_{n}^{k}$.

b) $C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+...+C_{n}^{n}=2^{n}$.

c) $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+C_{2n}^{5}+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{4}+...+C_{2n}^{2n}$.

d) Tất cả các ý trên đều đúng.

Câu 29: Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển của nhị thức $(37+19)^{31}$.

a) $C_{31}^{10}37^{21}.19^{10}$. c) $C_{31}^{12}37^{12}.19^{19}$.

b) $C_{31}^{10}37^{10}.19^{21}$. d) $C_{31}^{12}37^{19}.19^{12}$.

Câu 30: Phép toán nào sau đây không phải là một luật hợp thành trong:

a) Phép cộng hai véc tơ. b) Tích vô hướng hai véc tơ.

c) Phép cộng hai đa thức. d) Phép nhân hai hàm số.

Câu 31: Phép hợp thành trong nào sau đây không có tính giao hoán:

a) Phép cộng các số thực.

b) Phép nhân các số tự nhiên.

c) Phép hợp các ánh xạ từ tập $E \neq \phi$ vào chính tập E.

d) Phép cộng các hàm số.

Câu 32: Trường hợp nào sau đây không có cấu trúc nhóm

a) Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng.

b) Tập các số tự nhiên $\mathbb{Z}$ với phép cộng.

c) Tập các số hữu tỉ khác không $\mathbb{Q}^*$ với phép nhân.

d) Tập các số hữu tỉ dương khác không $\mathbb{Q}_+^*$ với phép nhân.

Câu 33: Giả sử $(G,*)$ là một nhóm. Điều nào sau đây không đúng:

a) Phần tử trung hoà e là duy nhất.

b) Với mỗi phần tử x, phần tử đối x' của nó là duy nhất.

c) Phần tử trung hoà e không có phần tử đối.

d) Thoả mãn luật giản ước, nghĩa là nếu $x * y = x * z$ thì $y = z$.

Câu 34: Trong mỗi tập số sau đây với phép cộng số và phép nhân số, trường hợp nào không phải là một vành:

a) Tập các số nguyên chẵn.

b) Tập các số hữu tỉ dương $\mathbb{Q}_+$.

c) Tập các số có dạng $a + b\sqrt{2}$, a và b nguyên.

d) Tập các số nguyên môđulô p.

Câu 35: Cho A là một vành. Phần tử $x \in A$ được gọi là luỹ linh nếu tồn tại một số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $x^n = 0$. Điều nào sau đây không đúng:

a) Nếu x, y luỹ linh và $xy = yx$ thì $x + y$ cũng lũy linh.

b) Nếu x luỹ linh và $xy = yx$ thì xy cũng lũy linh.

c) Nếu $x \in A$ luỹ linh thì tồn tại x^{-1}.

d) Nếu $x \in A$ luỹ linh thì tồn tại $(1-x)^{-1}$.

Câu 36: Hãy xác định các công thức đại số Boole nào sau đây là tương đương:

a) $(x \wedge z) \vee (x' \wedge y)$.　　b) $(x \wedge y') \vee z$.

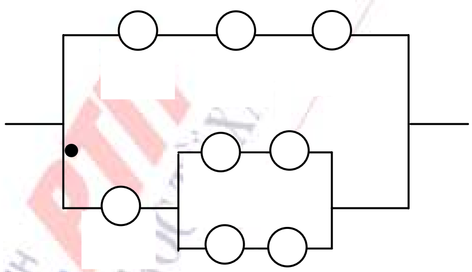
c) $(x \vee y) \wedge (x' \vee z) \wedge (y \vee z)$.　　d) $[y \vee (x \wedge z)] \wedge [z \vee (x' \wedge y)]$.

Câu 37: Công thức $[x \vee (y' \wedge z) \vee (x \wedge z')] \vee (y \wedge z)$ có công thức rút gọn là công thức nào sau đây:

a) $y \vee z$.　　c) $(x \wedge y') \vee z$.

b) $x \vee z$.　　d) $(x \wedge z') \vee y$.

Câu 38: Trường hợp nào sau đây là công thức rút gọn của mạng



a) $x \wedge (y \vee z)$.　　b) $x \vee (y \wedge z)$.

c) $z \wedge (y \vee x)$.　　d) $y \vee (x \wedge z)$.

CHƯƠNG 2: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

2.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Khái niệm không gian véc tơ có nguồn gốc từ vật lý. Ban đầu các véc tơ là những đoạn thẳng có định hướng, với khái niệm này người ta đã sử dụng để biểu diễn các đại lượng vật lý như: véc tơ vận tốc, lực tác động, lực điện từ... . Các nhà vật lý còn sử dụng phương pháp véc tơ Fresnel để tổng hợp các dao động điều hoà.

Cuối thế kỷ 17 Descartes đã đề xuất phương pháp toạ độ để giải quyết các bài toán hình học. Với phương pháp này mỗi véc tơ trong mặt phẳng được đồng nhất với một cặp số là hoành độ và tung độ còn véc tơ trong không gian được đồng nhất với bộ ba số. Các phép toán của véc tơ (cộng véc tơ, nhân 1 số với véc tơ) có thể chuyển tương ứng bằng phép toán trên các bộ số và thoả mãn một số tính chất nào đó. Trong nhiều lĩnh vực khác chúng ta cũng thấy những đối tượng khác như các đa thức, hàm số, v.v... có các phép toán thoả mãn các tính chất tương tự các véc tơ. Điều này dẫn đến việc khái quát hoá khái niệm véc tơ.

Trong các công trình về số quaternion từ năm 1843 của nhà toán học Anh Hamilton, người ta có thể tìm thấy một dạng thô sơ của khái niệm không gian vec tơ 3 và 4 chiều. Hamilton dùng các số quaternion để nghiên cứu các vấn đề toán lý. Sau đó các nhà vật lý như Maxwell và Gibbs đã phát triển dần lý thuyết không gian véc tơ 3 chiều. Khái niệm không gian véc tơ 4 chiều được Einstein (Anh-xtanh) sử dụng trong thuyết tương đối. Ngày nay lý thuyết không gian véc tơ nhiều chiều được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác.

Chúng ta thấy khái niệm không gian véc tơ được hình thành qua một quá trình lâu dài trên cơ sở các thành tựu về lý thuyết cũng như ứng dụng thực tế và khái quát hoá cao. Vì vậy để học tốt chương này đòi hỏi người học phải nắm vững khái niệm không gian véc tơ với mức độ trừu tượng cao, còn các mô hình cụ thể là các không gian 2 chiều, 3 chiều ta đã biết. Đối tượng của ta ở đây là các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Đó là các không gian có hệ sinh hữu hạn. Trong không gian này mọi véc tơ đều có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của hệ sinh. Muốn cho biểu diễn này là duy nhất thì hệ sinh phải độc lập tuyến tính, lúc đó ta gọi là một cơ sở của không gian véc tơ. Các hệ số trong biểu diễn ở trên được gọi là toạ độ của véc tơ.

Học viên cần luyện tập tìm toạ độ của một véc tơ trong các cơ sở khác nhau. Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ véc tơ cho trước. Tìm hạng của một hệ véc tơ, tìm chiều của không gian con. Công thức chiều của tổng hai không gian véc tơ con, chiều của giao của hai không gian véc tơ con. Thấy được mối liên hệ giữa hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ sinh và cơ sở, liên hệ giữa hạng của hệ sinh và chiều của không gian sinh bởi hệ sinh này (định lý 2.17). Liên hệ với những phép toán và tính chất véc tơ đã biết ở phổ thông.

2.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

2.2.1 Khái niệm không gian vectơ

Không gian véc tơ trên trường K là tập V khác ϕ với hai phép toán:

* Phép toán trong

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (u,v) &\mapsto u \end{aligned}$$

* Phép toán ngoài

$$\begin{aligned} K \times V &\to V \\ (\alpha,u) &\mapsto \alpha u \end{aligned}$$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u,v,w \in V$ và $\alpha,\beta \in K$

- ✓ $(u+v)+w = u+(v+w)$
- ✓ Có $\boldsymbol{0} \in V$ sao cho $u+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+u = u$
- ✓ Với mỗi $u \in V$ có $-u \in V$ sao cho $u+(-u) = (-u)+u = \boldsymbol{0}$
- ✓ $u+v = v+u$
- ✓ $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
- ✓ $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- ✓ $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- ✓ $1u = u$, trong đó 1 là phần tử đơn vị của K.

Khi $K = \mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véc tơ thực.

Khi $K = \mathbb{C}$ thì V thì được gọi là không gian véc tơ phức.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ, các phần tử của K được gọi là các phần tử vô hướng.

Vì $(V,+)$ là một nhóm Abel nên véc tơ $\boldsymbol{0}$ và véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất với mọi $u \in V$.

- ✓ Có luật giản ước: $u+v = u+w \Rightarrow v = w$.
- ✓ Với mọi $u \in V$, $0u = \boldsymbol{0}$, $(-1)u = -u$.

✓ Với mọi $\alpha \in K$, $\alpha \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

✓ Nếu $\alpha u = \boldsymbol{0}$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \boldsymbol{0}$.

Ta định nghĩa $u - v := u + (-v)$, khi đó $u + v = w \Leftrightarrow u = w - v$.

Với các véc tơ $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ và với mọi $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K$, do tính kết hợp của phép cộng nên ta có thể định nghĩa theo qui nạp:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n \in V$$

biểu thức này được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, ..., u_n$.

Trong giáo trình này ta chỉ xét $K = \mathbb{R}$, nghĩa là chỉ xét các không gian véc tơ thực.

2.2.2 Không gian vectơ con

a. Không gian véc tơ con:

Tập con $W \neq \phi$ của V sao cho hai phép toán từ V thu hẹp vào W trở thành không gian véc tơ (thoả mãn các tiên đề V1-V8) thì W được gọi là không gian véc tơ con của V (hay nói tắt: không gian con của V).

b. Không gian con W bé nhất chứa hệ véc tơ S được gọi là không gian sinh bởi hệ S ký hiệu $W = \operatorname{span} S$ và S được gọi là hệ sinh của W.

$W = \operatorname{span} S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.

Nếu $V = \operatorname{span} S$, $S = \{v_1, ..., v_n\}$ hữu hạn thì V được gọi là không gian hữu hạn sinh. Lúc đó, với mọi $u \in V$; $u = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

c. Tổng của một họ không gian véc tơ con: Giả sử $W_1, ..., W_n$ là n không gian con của V. Ta ký hiệu $W_1 + ... + W_n$ là tổng của các không gian con $W_1, ..., W_n$ và định nghĩa như sau:

$u \in W_1 + ... + W_n \Leftrightarrow u = u_1 + ... + u_n, u_i \in W_i; i = 1, ..., n$.

Tuy nhiên, nói chung cách viết trên không duy nhất.

Khi với mỗi $u \in W_1 + ... + W_n$ cách viết trên duy nhất thì tổng các không gian con này được gọi là tổng trực tiếp. Lúc đó ta ký hiệu: $W_1 \oplus ... \oplus W_n$.

Tổng $W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp khi và chỉ khi $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

Ta có thể chứng minh được $W_1 + ... + W_n = \operatorname{span}(W_1 \cup ... \cup W_n)$

Một cách tổng quát ta định nghĩa và ký hiệu tổng của một họ các không gian véc tơ con $(W_i)_{i\in I}$ là $\sum_{i\in I} W_i = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i\in I} W_i\right)$.

Vậy $\sum_{i\in I} W_i = \left\{u_{i_1} + \ldots + u_{i_k} \,\middle|\, u_{i_j} \in W_{i_j}, i_j \in I, j = 1,\ldots,k; k = 1,2,\ldots\right\}$.

2.2.3 Độc lập tuyến tính

Hệ n véc tơ $S = \{u_1,\ldots,u_n\}$ của V được gọi là độc lập tuyến tính nếu:

$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = \mathbf{0}, \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ thì $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Hệ con $\{v_1,\ldots,v_n\}$ của hệ S được gọi là độc lập tuyến tính tối đại của S nếu nó là hệ độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính.

Mọi hệ véc tơ S đều có hệ con độc lập tuyến tính tối đại, số véc tơ của các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S đều bằng nhau và ta gọi là hạng của S, ký hiệu $r(S)$.

Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là một cơ sở của V.

Nếu $\mathscr{B} = \{e_1,\ldots,e_n\}$ là một cơ sở của V. Lúc đó, với mọi $u \in V$; tồn tại duy nhất $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ sao cho $u = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$.

$(x_1,\ldots,x_n) = [u]_{\mathscr{B}}$ được gọi là toạ độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Mọi không gian hữu hạn sinh V đều tồn tại cơ sở. Số phần tử của mọi cơ sở của V đều bằng nhau và được gọi là số chiều của V, ký hiệu $\dim V$.

$\dim(\operatorname{span} S) = r(S)$.

2.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1: Trường hợp nào sau đây tập $\mathbb{R}^3$ với các phép toán được định nghĩa là không gian véc tơ

a) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z)\\ \alpha(x,y,z)=(\alpha x,y,z); \qquad \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$

b) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\\ \alpha(x,y,z)=(2\alpha x,2\alpha y,2\alpha z); \qquad \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x'+1,y+y'+1,z+z'+1)\\ \alpha(x,y,z)=(0,0,0)\,; \qquad \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$

d) $\begin{cases}(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\\ \alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)\,; \qquad \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Câu 2: Với các phép cộng hai hàm số và phép nhân hàm số với số thực, tập các hàm số nào sau đây là không gian véc tơ.

a) Tập các hàm số không âm trên $[a,b]$.

b) Tập các hàm số bị chặn trên $[a,b]$.

c) Tập các hàm số khả vi trên $[a,b]$ (có đạo hàm tại mọi điểm).

d) Tập các hàm số trên $[a,b]$ sao cho $f(b)=1$.

Câu 3: Tập hợp các véc tơ có dạng nào sau đây không là không gian con của $\mathbb{R}^3$

a) Các véc tơ có dạng $(x,0,z)$.

b) Các véc tơ có dạng $(x,y,1)$.

c) Các véc tơ có dạng (x,y,z) thoả mãn $x+y+z=0$.

d) Các véc tơ có dạng (x,y,z), $2x-y+z=0$, $x+y-4z=0$.

Câu 4: Tập hợp các véc tơ có dạng nào sau đây không là không gian con của $\mathbb{R}^3$

a) Các véc tơ (x,y,z) thoả mãn $x\le y\le z$.

b) Các véc tơ (x,y,z) thoả mãn $xy=0$.

c) Các véc tơ (x,y,z) thoả mãn $3x+2y-4z=0$.

d) Các véc tơ (x,y,z) thoả mãn $x=y^2$.

Câu 5: Tìm véc tơ u sau của không gian $\mathbb{R}^4$ thoả mãn phương trình:

$$3(v_1-u)+2(v_2+u)=5(v_3+u)$$

trong đó $v_1=(2,5,1,3)$; $v_2=(10,1,5,10)$; $v_3=(4,1,-1,1)$

a) $u=(6,12,18,24)$. b) $u=(7,-2,3,0)$.

c) $u=(1,2,3,4)$. d) $u=(-2,3,7,0)$.

Câu 6: Hãy biểu diễn véc tơ u thành tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3:

a) $u=(7,-2,15)$; $v_1=(2,3,5)$, $v_2=(3,7,8)$, $v_3=(1,-6,1)$.

b) $u=(1,4,-7,7)$; $v_1=(4,1,3,-2)$, $v_2=(1,2,-3,2)$, $v_3=(16,9,1,-3)$.

c) $u=(6,9,14)$; $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,2,3)$.

d) $u=(6,2,-7)$; $v_1=(2,1,-3)$, $v_2=(3,2,-5)$, $v_3=(1,-1,1)$.

Câu 7: Hãy xác định λ sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w: $x=(7,-2,\lambda)$; $u=(2,3,5)$, $v=(3,7,8)$, $w=(1,-6,1)$.

a) $\lambda=10$. c) $\lambda=-11$.

b) $\lambda=12$. d) $\lambda=11$.

Câu 8: Hệ véc tơ nào sau đây sinh ra $\mathbb{R}^3$

a) $u=(2,1,-3)$, $v=(3,2,-5)$, $w=(1,-1,1)$.

b) $u=(2,-1,3)$, $v=(4,1,2)$, $w=(8,-1,8)$.

c) $u=(3,1,4)$, $v=(2,-3,5)$, $w=(5,-2,9)$, $s=(1,4,-1)$.

d) $u=(3,0,13)$, $v=(2,7,4)$, $w=(1,-10,11)$.

Câu 9: Hệ véc tơ nào sau đây của $\mathbb{R}^3$ là độc lập tuyến tính

a) $u=(1,-2,1)$, $v=(2,1,-1)$, $w=(7,-4,1)$.

b) $u=(1,-3,7)$, $v=(2,0,8)$, $w=(8,-1,8)$, $x=(3,-9,7)$.

c) $u=(1,2,-3)$, $v=(1,-3,2)$, $w=(2,-1,5)$.

d) $u=(2,-3,13)$, $v=(0,0,0)$, $w=(1,-10,11)$.

Câu 10: Hệ véc tơ nào dưới đây là độc lập tuyến tính.

a) $u=(4,-2,6)$, $v=(6,-3,9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u=(2,-3,1)$, $v=(3,-1,5)$, $w=(1,-4,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u=(5,4,3)$, $v=(3,3,2)$, $w=(8,1,3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u=(4,-5,2,6)$, $v=(2,-2,1,3)$, $w=(6,-3,3,9)$, $s=(4,-1,5,6)$

trong $\mathbb{R}^4$.

Câu 11: Tìm λ để hệ véc tơ sau phụ thuộc tuyến tính:

$u=(\lambda,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2})$, $v=(\frac{-1}{2},\lambda,\frac{-1}{2})$, $w=(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\lambda)$.

a) $\lambda=1$.

b) $\lambda=2$, $\lambda=1/2$.

c) $\lambda=1$, $\lambda=1/2$.

d) $\lambda=-3$.

Câu 12: Xác định hệ véc tơ nào sau đây là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$

a) $u=(1,-2,1)$, $v=(2,1,-1)$.

b) $u=(2,-3,13)$, $v=(2,0,8)$, $w=(8,-1,8)$, $x=(3,-9,7)$.

c) $u=(1,1,1)$, $v=(1,2,3)$, $w=(2,-1,1)$.

d) $u=(1,1,2)$, $v=(1,2,5)$, $w=(5,3,4)$.

Câu 13: Xác định toạ độ của véc tơ $v=(4,-3,2)$ viết trong cơ sở

$\mathscr{B}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ của không gian $\mathbb{R}^3$.

a) $[v]_{\mathscr{B}}=(2,-3,8)$.

b) $[v]_{\mathscr{B}}=(2,-5,7)$.

c) $[v]_{\mathscr{B}}=(-2,-3,8)$.

d) $[v]_{\mathscr{B}}=(2,-3,-8)$.

Câu 14: Tìm chiều của các không gian con của $\mathbb{R}^4$

a) Các véc tơ có dạng $(x,y,0,t)$.

b) Các véc tơ có dạng (x,y,z,t) với $z=x-y$ và $t=x+y$.

c) Các véc tơ có dạng (x,y,z,t) với $x=y=z=t$.

d) Các véc tơ có dạng (x,y,z,t) với $x=2y+z-3t$.

Câu 15: Tìm hạng r của hệ véc tơ sau của không gian $\mathbb{R}^4$:

$v_1=(1,2,3,4)$; $v_2=(2,3,4,5)$; $v_3=(3,4,5,6)$; $v_4=(4,5,6,7)$.

a) $r=4$.

b) $r=3$.

c) $r=2$.

d) $r=1$.

Câu 16: Tìm chiều của không gian con sinh bởi hệ các véc tơ sau:

a) $v_1=(2,4,1)$, $v_2=(3,6,-2)$, $v_3=(-1,2,-1/2)$.

b) $v_1=(2,4,1,-3)$, $v_2=(1,2,1,-2)$, $v_3=(1,2,2,-3)$.

c) $v_1=(1,0,0,-1)$, $v_2=(2,1,1,0)$, $v_3=(1,1,1,1)$, $v_4=(1,2,3,4)$,

$v_5 = (0,1,2,3)$.

d) $v_1 = (1,1,1,1,0)$, $v_2 = (1,1,-1,-1,-1)$, $v_3 = (2,2,0,0-1)$,

$v_4 = (1,1,5,5,2)$, $v_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

Câu 17: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ:

$v_1 = (2,4,1,-3)$; $v_2 = (1,2,1,-2)$; $v_3 = (1,2,2,-3)$;

$u_1 = (2,8,3,-7)$; $u_2 = (1,0,1,-1)$; $u_3 = (3,8,4,-8)$.

Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2 = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$

Hãy tìm số chiều của các không gian con V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

a) $\dim(V_1) = 3$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 4$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

b) $\dim(V_1) = 3$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 5$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

c) $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 3$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

d) $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 3$, $\dim(V_1 + V_2) = 4$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Câu 18: Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét các véc tơ:

$v_1 = (2,1,2,1)$; $v_2 = (3,4,2,3)$; $v_3 = (1,1,1,1)$;

$u_1 = (-1,-1,1,3)$; $u_2 = (1,1,0,-1)$; $u_3 = (2,2,2,2)$.

Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2 = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$

Hãy tìm số chiều của các không gian con V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

a) $\dim(V_1) = 3$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 4$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

b) $\dim(V_1) = 3$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 5$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

c) $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_1 + V_2) = 3$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

d) $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 3$, $\dim(V_1 + V_2) = 4$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Câu 19: Cho hai hệ véc tơ:

$v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,-1,1,-1), v_3 = (1,3,1,3)$ và

$u_1 = (1,2,0,2), u_2 = (1,2,1,2), u_3 = (3,1,3,1)$.

Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2 = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$

Hãy tìm số chiều của các không gian con $V_1, V_2, V_1+V_2, V_1\cap V_2$.

a) $\dim(V_1)=3, \dim(V_2)=2, \dim(V_1+V_2)=4, \dim(V_1\cap V_2)=1$.

b) $\dim(V_1)=3, \dim(V_2)=2, \dim(V_1+V_2)=5, \dim(V_1\cap V_2)=1$.

c) $\dim(V_1)=2, \dim(V_2)=2, \dim(V_1+V_2)=3, \dim(V_1\cap V_2)=1$.

d) $\dim(V_1)=2, \dim(V_2)=3, \dim(V_1+V_2)=4, \dim(V_1\cap V_2)=1$.

Câu 20: Cho 3 véc tơ v_1, v_2, v_3 của không gian véc tơ V. Khẳng định nào sau đây là sai:

a) Nếu $\{v_1, v_2\}$độc lập thì $\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$ cũng độc lập.

b) Nếu $\{v_1, v_2, v_3\}$độc lập thì $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$ cũng độc lập.

c) Nếu $\{v_1, v_2, v_3\}$độc lập thì

$\{2v_1+v_2+v_3, v_1+2v_2+v_3, v_3-2v_2+5v_1\}$ cũng độc lập.

d) Nếu $\{v_1, v_2, v_3\}$độc lập thì $\{v_1+3v_2, v_1+2v_2-v_3, v_3+v_1\}$ cũng độc lập.

Câu 21: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V. Phát biểu nào sau đây không đúng:

a) W_1, W_2 là hai không gian con của W_1+W_2.

b) $W_1\cup W_2$ là không gian con của W_1+W_2.

c) W_1+W_2 là không gian véc tơ nhỏ nhất chứa $W_1\cup W_2$.

d) Tổng W_1+W_2 là tổng trực tiếp $W_1\oplus W_2$ khi và chỉ khi $W_1\cap W_2=\phi$.

Câu 22: Phát biểu nào sau đây không đúng:

a) Nếu W_1, W_2 là hai không gian con của $\mathbb{R}^3$, $\dim W_1=\dim W_2=2$ thì $W_1\cap W_2\neq\{0\}$.

b) $\dim W_1\oplus W_2=\dim W_1+\dim W_2$.

c) Tồn tại W_1, W_2 là hai không gian con của không gian véc tơ V thoả mãn $\dim W_1=4$, $\dim W_2=5$, $\dim V=7$ và $\dim W_1\cap W_2=1$.

d) Nếu W_1, W_2 là hai không gian con của $\mathbb{R}^3$, $\dim W_1=1, \dim W_2=2$ và $W_1\not\subset W_2$ thì $\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$.

Câu 23: Cho $u=(1,-3,2)$ **và** $v=(2,-1,1)$ **là hai véc tơ của** $\mathbb{R}^3$**. Với giá trị** k **nào thì** $(1,k,5)\in \text{span}\{u,v\}$**.**

a) $k=9$. c) $k=-4$.

b) $k=4$. d) $k=-8$.

Câu 24: Cho $u=(1,-3,2)$ **và** $v=(2,-1,1)$ **là hai véc tơ của** $\mathbb{R}^3$**. Véc tơ nào sau đây thuộc không gian** $\text{span}\{u,v\}$**.**

a) $(2,-5,4)$. c) $(2,-5,-4)$.

b) $(1,7,-4)$. d) $(3,-5,8)$.

Câu 25: Cho $W_1=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$, $W_2=\text{span}\{(1,2,3);(1,-1,1)\}$ **là hai không gian véc tơ con của** $\mathbb{R}^3$**. Véc tơ nào sau đây thuộc vào không gian con** $W_1\cap W_2$**.**

a) $(1,-6,2)$. c) $(2,-5,0)$.

b) $(1,-6,0)$. d) $(5,-6,0)$.

Câu 26: Cho W_1, W_2, W_3 **là ba không gian véc tơ con của** $\mathbb{R}^3$ **xác định như sau:** $W_1=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$, $W_2=\{(x,y,z)\mid x=z\}$, $W_3=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

Hãy tìm câu trả lời đúng nhất

a) $\mathbb{R}^3=W_1+W_2$.

b) $\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_3$.

c) $\mathbb{R}^3=W_2\oplus W_3$.

d) Tất cả các trường hợp trên đều dúng.

CHƯƠNG 3: MA TRẬN

3.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Lý thuyết ma trận có mặt khắp nơi, trong toán học cũng như trong các ngành khoa học khác. Vì vậy chúng ta dễ lầm tưởng rằng lý thuyết ma trận ra đời đã lâu lắm nhưng thực tế lý thuyết này mới ra đời từ đầu thế kỷ 19, mặc dù nhiều loại bảng số có tính chất đặc biệt đã được biết đến từ hàng trăm năm nay. Các ma trận vuông xuất hiện đầu tiên ở đầu thế kỷ 19 trong các công trình về dạng toàn phương hay về các phép thế tuyến tính. Phép nhân hai ma trận vuông cấp 3 được Gauss (Gau-xơ) đưa ra vào năm 1801. Tên gọi ma trận được nhà toán học Anh Sylvester (Synvét) đưa ra năm 1850. Cayley (Kê-li) là người đầu tiên mô tả một cách tổng quát các phép tính với các ma trận bất kỳ và ma trận nghịch đảo (1858). Peano là người đầu tiên đưa ra cách biểu diễn một ánh xạ tuyến tính qua các ma trận. Còn Gauss là người đầu tiên sử dụng ma trận để nghiên cứu các dạng toàn phương.

Ký hiệu ma trận cô đọng, rất có ích và thuận tiện trong khi thực hiện các phép biến đổi tuyến tính (chương 6) và cho phép ta phát triển một phương pháp hoàn chỉnh để giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính. Sự quan tâm của các nhà vật lý đối với lý thuyết ma trận, đặc biệt tăng lên sau khi Heisenberg, Born, Jordan vào năm 1925 đã dùng nó trong các bài toán của cơ học lượng tử. Sự phát triển của máy tính hiện đại thực hiện dễ dàng những phép tính ma trận cơ bản càng thúc đẩy thêm sự ứng dụng rộng rãi ma trận vào những lĩnh vực khác.

Có người ví ma trận như là số học của toán cao cấp. Cách ví von này hoàn toàn hợp lý vì ma trận được sử dụng rộng rãi trong các chuyên ngành khác nhau của toán học. Với tư cách là sự biểu diễn của các phép biến đổi tuyến tính, ma trận được sử dụng trong các bài toán cực trị của hàm nhiều biến, đạo hàm hàm hợp, ma trận Jacobi trong phép đổi biến số, giải các hệ phương trình vi phân tuyến tích. Các ma trận dương dùng để mô tả các đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên, mô tả xác suất chuyển của chuỗi Markov trong lý thuyết xác suất. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính. Phân loại các đường, mặt bậc 2... Chương trình phần mềm MATLAB (Matrix laboratory) hỗ trợ cho việc tính toán, đồ hoạ và mô phỏng cũng được thực hiện trong môi trường ma trận.

Nắm vững khái niệm ma trận giúp học viên học tốt các chương 4,5,6,7.

Trong chương này ta chỉ xét khái niệm ma trận cùng với các phép toán cộng ma trận, nhân một số với ma trận, nhân hai ma trận và ma trận chuyển vị.

Cộng hai ma trận cùng cỡ được thực hiện bằng cách cộng các phần tử nằm trên các hàng các cột tương ứng với nhau. Nhân một số với ma trận là nhân số này với mọi phần tử của ma trận. Hai phép toán này được thực hiện một cách dễ dàng. Phép nhân hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận trước bằng số hàng của ma trận sau. Khi đó phần tử ở hàng i cột j của ma trận tích có được bằng cách lấy các phần tử trên hàng thứ i của ma trận trước nhân tương ứng với các phần tử trên cột thứ j của ma trận sau rồi cộng lại. Như vậy phép nhân ma trận được thực hiện khó hơn nhiều. Học viên cần luyện tập nhiều về phép nhân ma trận.

Tập hợp các ma trận cùng cỡ với phép cộng ma trận và phép nhân một số với ma trận là một không gian véc tơ. Tập hợp các ma trận vuông cùng cấp với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với ma trận là một vành có đơn vị, không giao hoán và không nguyên.

Ma trận của một hệ véc tơ trong một cơ sở B nào đó là ma trận có các cột là toạ độ của hệ véc tơ này trong cơ sở B. Ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B' là ma trận của hệ véc tơ B' viết trong cơ sở B. Hạng của ma trận là hạng của hệ véc tơ cột.

Ma trận nghịch đảo được xét trong chương 4 khi ta đã học định thức của ma trận. Bài toán chéo hoá ma trận được xét trong chương 6 cùng với bài toán chéo hoá tự đồng cấu tuyến tính. Ma trận trực giao và bài toán chéo hoá trực giao của một ma trận được xét trong chương 7 bằng cách sử dụng tích vô hướng.

3.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

3.2.1 Khái niệm ma trận

Một bảng số có m hàng n cột

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là một ma trận cỡ $m\times n$. a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột j.

Viết tắt dạng $A=\left[a_{ij}\right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ hay $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

Tuỳ theo các phần tử a_{ij} là số nguyên, thực hay phức mà ta nói A là ma trận nguyên, thực hay là ma trận phức.

✓ Khi $m=n$ ta nói A là ma trận vuông cấp n.

✓ Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.

✓ Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

Ma trận không

$$\boldsymbol{0} = [o]_{m\times n} \text{ (các phần tử đều bằng 0)}$$

Hai ma trận cùng cỡ bằng nhau

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = B = [b_{ij}]_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ với mọi } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

3.2.2 Các phép toán ma trận

a. Cộng hai ma trận cùng cỡ: $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

b. Nhân ma trận với một số: $k[a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$

Nhân ma trận với ma trận: Tích hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ là ma trận cỡ m×n $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$ trong đó $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ với mọi $i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$.

c. Ma trận đơn vị cấp n: Ma trận I_n vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng 0. Với mọi ma trận A cỡ $m \times n$ ta có $I_m A = A = AI_n$.

d. Ma trận chuyển vị: Ma trận chuyển vị của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là

$$A^t = [c_{ij}]_{n\times m} \ ; \ c_{ij} = a_{ji} \quad i = \overline{1,n} \ \ j = \overline{1,m}$$

3.2.3 Ma trận của một hệ véc tơ trong một cơ sở nào đó

Giả sử V là không gian n chiều với một cơ sở $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots.. e_n\}$.

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ là một hệ véc tơ của V có toạ độ trong cơ sở $\mathcal{B}$:

Nếu $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ , j = \overline{1,m}$ thì $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Ma trận chuyển cơ sở : Ma trận của hệ véc tơ $\mathcal{B}'$ trong cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$.

Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,.....e'_n\}$ là hai cơ sở của V.

Nếu $e'_j=\sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$, $j=\overline{1,n}$ ...

thì $P=\left[t_{ij}\right]$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$.

$$\forall u\in V\,; u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i=\sum_{i=1}^{n} x'_i\, e'_i \text{, công thức đổi tọa độ}$$

$$\left[x_i\right]_{n\times 1}=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}\left[x'_j\right]_{n\times 1}$$

Nếu A, A' lần lượt là ma trận của $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ thì $A=PA'$.

3.2.4 Hạng của ma trận

Ta gọi hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là hạng của các véc tơ cột của A.

3.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1: Phép toán nào sau đây không thực hiện được

a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 6\\ 5 & 0 & 7 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & 1 & -3 & 0\\ -2 & 8 & -4 & 2\end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 9\end{bmatrix}$.

c) $-3\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 6\\ 5 & 0 & 7 & 9\end{bmatrix}$. d) $0\begin{bmatrix}-5 & 1 & -3 & 0\\ -2 & 8 & -4 & 2\end{bmatrix}$.

Câu 2: Cho

$A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

Tìm $3A+4B-2C$.

a) $\begin{bmatrix}12 & 7 & -5\\ 4 & 9 & 21\end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix}10 & -25 & -5\\ 7 & -2 & 10\end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix}12 & 17 & -25\\ 24 & -9 & 21\end{bmatrix}$.

Câu 3: Tìm x,y,z,w **nếu** $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$

a) $x=2, y=4, z=1, w=3$. b) $x=3, y=5, z=1, w=6$.

c) $x=-2, y=5, z=3, w=-1$.　　d) $x=-3, y=5, z=2, w=7$.

Câu 4: Cho A,B,C là 3 ma trận vuông cấp n. Điều nào sau đây không luôn đúng.

a) $A(BC)=(AB)C$.　　b) $A(B+C)=AB+AC$.

c) $A(kB)=(kA)B=k(AB)$.　　d) $AB=BA$.

Câu 5: Cho $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 6 & 4\\ 0 & -2 & 7 & 5\end{bmatrix}$. **Phép toán nào sau đây thực hiện được**

a) $A+B$.　　b) AB.　　c) A^tB.　　d) AB^t.

Câu 6: Cho $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$. **Tính AB.**

a) $\begin{bmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & -2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{bmatrix}$.　　b) $\begin{bmatrix}15 & -21\\ 10 & -3\end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix}11 & -8 & 9\\ 10 & 21 & 3\\ -7 & 9 & 15\end{bmatrix}$.　　d) $\begin{bmatrix}8 & -5 & 9\\ -7 & 0 & 10\\ -14 & 27 & 18\end{bmatrix}$.

Câu 7: Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$. **Tính A^tA.**

a) $\begin{bmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & -2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{bmatrix}$.　　b) $\begin{bmatrix}10 & -1 & 12\\ -1 & 5 & -4\\ 12 & -4 & 16\end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{bmatrix}$.　　d) $\begin{bmatrix}1 & 18 & -10\\ 11 & 2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{bmatrix}$.

Câu 8: Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$. **Tìm $2A^3-4B+5I$.**

a) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} -11 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$.

Câu 9: Tìm x, y nếu $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

a) $x = 3, y = 5$. b) $x = -6, y = -10$.

c) $x = 12, y = 20$. d) Các trường hợp trên đều đúng.

Câu 10: Tìm x, y, z, w thoả mãn $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$**.**

a) $x = y = 4,\ z = w = 3$. b) $x = w, z = 0$; x, y tuỳ ý.

c) $x = y,\ z = w$; x, z tuỳ ý. d) $x = z, w = 0$; x, y tuỳ ý.

Câu 11: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$**. Tìm** A^n**.**

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 12: Tính $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{2003}$

a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 1 & 2003 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Câu 13: Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n. Ta gọi $\mathrm{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (tổng các phần tử trên đường chéo chính) là vết của A. Khẳng định nào sau đây không đúng:

a) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$.

b) $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ (mặc dù $AB \neq BA$).

c) Tồn tại ma trận A, B sao cho $AB - BA = I$.

d) Nếu $B = P^{-1}AP$ thì $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$.

Câu 14: Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ sao cho $A^n = I$, với số tự nhiên $n > 0$ nào đó.

a) A có dạng $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; với y tuỳ ý.

b) A có dạng $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; với y tuỳ ý.

c) A có dạng $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ & -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$; với x, y tuỳ ý.

d) A có dạng $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Câu 15: Tập con W nào sau đây là không gian véc tơ con của không gian véc tơ $\mathcal{M}_2$ các ma trận vuông cấp 2.

a) W tập các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn $ad - bc = 0$.

b) W tập các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$.

c) W tập các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn $A^2 = A$.

d) W tập các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$ a, b, c tuỳ ý.

Câu 16: Tìm x, y, z sao cho $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (biểu diễn một ma trận thành tổ hợp tuyến tính của 3 ma trận khác).

a) $x = -4,\ y = 5,\ z = -1$.

b) $x = 4,\ y = -5,\ z = 2$.

c) $x = -3,\ y = 4,\ z = 1$.

d) $x = 3,\ y = -2,\ z = -1$.

Câu 17: Viết ma trận A của hệ véc tơ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$v_1 = (1,-2,5)$, $v_2 = (3,-4,0)$, $v_3 = (7,3,-5)$, $v_4 = (11,3,-12)$

trong cơ sở chính tắc của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & 3 & -5 \\ 11 & 3 & -12 \end{bmatrix}$.　　b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ -5 & 3 & 7 \\ -12 & 3 & 11 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ -2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & -5 & -12 \end{bmatrix}$.　　d) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & -12 \\ -2 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$.

Câu 18: Giả sử $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ của không gian $\mathbb{R}^3$. Cho $\mathscr{B} = \{(-1,2,4), (2,1,-2), (3,0,-5)\}$ tìm $\mathscr{B}'$.

a) $\mathscr{B}' = \{(8,5,-7), (-20,5,39), (5,14,9)\}$.

b) $\mathscr{B}' = \{(21,19,15), (-3,-7,1), (17,21,8)\}$.

c) $\mathscr{B}' = \{(2,5,3), (10,5,-11), (11,14,-1)\}$.

d) $\mathscr{B}' = \{(-12,24,-8), (-5,8,-1), (27,-11,-7)\}$.

Câu 19: Trong không gian $\mathbb{R}^3$. Cho hai cơ sở

$\mathscr{B} = \{(1,2,1), (2,3,3), (3,7,1)\}$, $\mathscr{B}' = \{(3,1,4), (5,2,1), (1,1,-6)\}$. Tìm công thức liên hệ giữa toạ độ của một véc tơ trong hai cơ sở trên, $[u]_{\mathscr{B}} = (x, y, z)$ và $[u]_{\mathscr{B}'} = (x', y', z')$

a) $x = -27x' - 71y' - 41z'$, $y = 9x' + 20y' + 9z'$, $z = 4x' + 12y' + 8z'$.

b) $x = 9x' + 17y' - 41z'$, $y = 9x' - 41y' + 12z'$, $z = 14x' + 23y' - 8z'$.

c) $x = -9x' + 27y' - 41z'$, $y = 19x' + 41y' + 12z'$, $z = 14x' + 23y' - 8z'$.

d) $x = 9x' + 17y' + 41z'$, $y = 9x' - 41y' + 12z'$, $z = 4x' - 43y' + 18z'$.

Câu 20: Tìm hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

a) $r(A)=4$.

b) $r(A)=3$.

c) $r(A)=2$.

d) $r(A)=1$.

CHƯƠNG 4: ĐỊNH THỨC

4.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Ma trận và định thức ngày nay luôn đi liền với nhau và ai cũng nghĩ là khái niệm định thức phải ra đời sau khái niệm ma trận, nhưng sự thực ngược lại. Định thức hình thành là nhằm để giải các hệ phương trình tuyến tính mà việc làm này đã có một lịch sử lâu đời trước đó.

Khái niệm định thức lần đầu tiên được Leibniz (Lépnít) đưa ra vào năm 1693 khi bàn đến việc giải hệ phương trình tuyến tính. Định thức được tiếp tục phát triển và nghiên cứu qua các công trình của Cramer (Còrame) (Thụy sĩ), Vandermonde (Vănđécmông) (Hà Lan), Laplace (Pháp), Jacobi (ia-cô-bi) (Đức)... Người đầu tiên nghiên cứu khái niệm định thức một cách hệ thống là Cauchy (Cô-si) (Pháp).

Ngoài ứng dụng để giải hệ phương trình tuyến tính, định thức còn được sử dụng để nghiên cứu những vấn đề của ma trận như: ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận, tìm giá trị riêng... Khảo sát tính chất độc lập của một hệ véc tơ. Định thức Jacobi được sử dụng trong phép đổi biến số của tích phân nhiều lớp. Định thức Wronsky (vrông-xki) dùng để kiểm tra tính chất độc lập tuyến tính của các nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Định thức của một ma trận vuông được định nghĩa bằng tổng của các số hạng gồm tích của các phần tử trên tất cả các hàng nằm trên các cột khác nhau và dấu của hoán vị tương ứng. Tuy nhiên khi tính định thức ta thường sử dụng các tính chất của nó và phương pháp khai triển theo hàng, theo cột hoặc nhiều hàng, nhiều cột (Định lý Laplace).

Để định nghĩa định thức ta sử dụng khái niệm phép thế đó là một song ánh từ một tập có n phần tử vào chính nó, ảnh của phép thế là hoán vị. Khái niệm phép thế, hoán vị ta đã gặp trong chương 1, trong mục giải tích tổ hợp.

Trong chương này ta xét đến hai ứng dụng của định thức là tìm ma trận nghịch đảo và tìm hạng của ma trận. Trong chương 5 ta sẽ ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính. Trong chương 6 ta sẽ ứng dụng định thức để tìm giá trị riêng của ma trận hoặc tự đồng cấu tuyến tính.

Trong chương 3, ta đã chỉ ra rằng tập các ma trận vuông cùng cấp với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận là một vành có đơn vị nhưng không nguyên, do đó nó không phải là một trường. Vì vậy tồn tại những ma trận vuông khác ma trận không và không khả nghịch. Sử dụng tính chất định thức của tích hai ma trận bằng tích hai định thức của hai ma trận này, ta chứng minh được điều kiện cần và đủ để một ma trận khả nghịch là định thức của nó khác 0. Đồng thời ta có công thức tính ma trận nghịch đảo bằng nghịch đảo của định thức nhân với chuyển vị của ma trận phụ hợp.

Hạng của một ma trận bằng cấp cao nhất của định thức con khác 0 chứa trong ma trận.

Vì vậy yêu cầu của chương này là phải nắm vững được định nghĩa định thức của một ma trận vuông, các tính chất của định thức, các phương pháp tính định thức. Từ đó có thể tính toán thành thạo định thức của các ma trận thông thường, vận dụng để giải các bài toán về ma trận nghịch đảo và hạng của ma trận và làm công cụ để học tiếp các chương sau.

Ngoài phương pháp sử dụng định thức ta có thể sử dụng phương pháp Gauss-Jordan để tìm ma trận nghịch đảo, thực chất của phương pháp này là sử dụng phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận.

4.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

4.2.1 Hoán vị và phép thế

Mỗi song ánh $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ được gọi là một phép thế bậc n.

Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị.

Nếu có cặp $i<j$ mà $\sigma(i)>\sigma(j)$ thì ta nói có một nghịch thế của σ.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ:

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k$$

Tập các phép thế bậc n ký hiệu S_n. Tập S_n có đúng n! phần tử.

4.2.2 Định thức của ma trận vuông

Định thức của ma trận vuông $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ được ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$ và định nghĩa bởi biểu thức:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Tính chất

- ✓ Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu. (1)
- ✓ Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng. (2)
- ✓ Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một ma trận có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0. (3)
- ✓ Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi. (4)
- ✓ Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó:
$$\det A^t = \det A \quad (5)$$
- ✓ Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh các định lý về định thức đúng với hàng. Chẳng hạn, từ 4) suy ra nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.
- ✓ Định thức của mọi hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính đều bằng 0.
- ✓ Với mọi ma trận cùng cấp A, B luôn có $\det AB = \det A \det B$.
- ✓ $\overline{\det(A)}(\operatorname{mod} p) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, \overline{a}_{1\sigma(1)} \ldots \overline{a}_{n\sigma(n)} = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \ldots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{n1} & \ldots & \overline{a}_{nn} \end{vmatrix}$

4.2.3 Các cách tính định thức

a. Khai triển theo cột

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

gọi là công thức khai triển của A theo cột thứ j. Trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} là định thức của ma trận cấp n-1 có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận A. A_{ij} được gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

b. Khai triển theo hàng

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

gọi là công thức khai triển của A theo hàng thứ i.

Khai triển k cột $j_1,\ldots, j_k$ (Định lý Laplace)

$$\det A = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$$

trong đó $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ là định thức của ma trận có được bằng cách lấy các phần tử trên k hàng: $i_1,\ldots,i_k$ và k cột: $j_1,\ldots, j_k$ của ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, còn $\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ là định thức của ma trận ta xoá đi k hàng $i_1,\ldots,i_k$ và k cột $j_1,\ldots, j_k$ của ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ và $A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}=(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$.

c. Khai triển k hàng $i_1,\ldots,i_k$ (Định lý Laplace)

$$\det A = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$$

4.2.4 Ma trận nghịch đảo

Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$. Vì phép nhân ma trận có tính kết hợp nên B nếu tồn tại thì duy nhất và ta gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu A^{-1}.

A khả nghịch khi và chỉ khi $\det A \ne 0$ và $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}B^t$, với $B=\left[A_{ij}\right]_{n\times n}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, được gọi là ma trận phụ hợp của A.

a. Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan: Để tìm ma trận A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

✓ Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $A|I$

✓ Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A|I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị.

✓ Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}.

$A|I \to .... \to I|A^{-1}$.

b. Tìm hạng của ma trận bằng định thức

Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]$ là một ma trận cỡ $m\times n$. Nếu có định thức con cấp p khác 0 và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A)=p$.

4.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1: Trường hợp nào sau đây đúng

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=25$. b) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}=-b^2$.

c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=23$. d) $\begin{vmatrix} k+1 & k+2 \\ k+3 & k+4 \end{vmatrix}=k^4-3k^3+2k-1$

Câu 2: Cho A, B là hai ma trận vuông cấp $n\ge 2$.Trường hợp nào sau đây luôn đúng

a) $\det(kA)=k\det(A)$. b) $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$.

c) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. d) $\det(-A)=-\det(A)$.

Câu 3: Trường hợp nào sau đây không đúng

a) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0$.

b) Nếu A là ma trận vuông cấp n có $\det(A)=-9$ thì $\det\left(AA^t\right)=81$.

c) $\det\left(A^m\right)=\left(\det(A)\right)^m$, A là ma trận vuông cấp n.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 6 \\ 3 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 0$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$

a) $k = 0$. b) $k = 0, k = 4$. c) $k = 2, k = 4$. d) $k = 0, k = 2$.

Câu 5: Trường hợp nào sau đây không đúng

a) Định thức của ma trận vuông có một hàng là các số 0 thì bằng không.

b) Định thức của ma trận vuông có hai hàng tỉ lệ thì bằng không.

c) Định thức của ma trận vuông có một hàng tỉ lệ với một cột thì bằng không.

d) Nếu thay đổi vị trí hai hàng của định thức thì định thứcđổi dấu.

Câu 6: Trường hợp nào sau đây không đúng

a) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

Câu 7: Tính định thức $D=\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

a) $D=-69$. b) $D=-78$. c) $D=82$. d) $D=68$.

Câu 8: Tính định thức $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

a) $D=(x^2-2)(x^2-9)$. b) $D=(x^2-1)(x^2-4)$.

c) $D=(x^2-3)(x^2-9)$. d) $D=(x^2-1)(x^2-3)$.

Câu 9: Tính định thức $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 4 & -2 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

a) $D=-87$. b) $D=-170$.

c) $D=59$. d) $D=790$.

Câu 10: Tính định thức $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$

a) $D=-82(x-1)(x-2)(x-3)$.

b) $D=15(x-1)(x-2)(x-4)$.

c) $D=30(x+1)(x-2)(x-4)$.

d) $D=82(x-1)^2(x-3)$.

Câu 11: Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$**.**

a) $D = 125$. b) $D = -115$. c) $D = -125$. d) $D = 75$.

Câu 12: Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$**.**

a) $D = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$.

b) $D = (a - b - c)^2$.

c) $D = (a + b + c)^2$.

d) $D = a^2 + b^2 + c^2 + 4abc$.

Câu 13: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5-m \\ m+1 & 1 & 3 \\ 3 & m-1 & 3 \end{bmatrix}$ **;** $m \in \mathbb{R}$**. Với giá trị nào của** m **thì tồn tại ma trận nghịch đảo** A^{-1}**.**

a) $m \neq 1, m \neq 2$. b) $m \neq 1, m \neq 2, m \neq 5$.

c) $m \neq -2, m \neq 3, m \neq 5$. d) $m \neq -3, m \neq 2, m \neq 4$.

Câu 14: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & m & 2 \\ 4 & 1 & m \\ m & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **;** $m \in \mathbb{R}$**. Với giá trị nào của** m **thì tồn tại ma trận nghịch đảo** A^{-1}**.**

a) $m \neq 1, m \neq 2$. b) $m \neq 2, m \neq 5$.

c) $m \neq -5, m \neq 1, m \neq 4$. d) $m \neq -3, m \neq 1, m \neq 2$.

Câu 15: Tìm ma trận phụ hợp B của ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 7\end{bmatrix}$

a) $B=\begin{bmatrix}5 & 8 & -7\\ 2 & 4 & -3\\ -4 & 7 & -1\end{bmatrix}$.

b) $B=\begin{bmatrix}1 & -10 & 7\\ 1 & 4 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

c) $B=\begin{bmatrix}8 & -6 & 7\\ 11 & 23 & -3\\ -12 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

d) $B=\begin{bmatrix}2 & -8 & 5\\ 9 & 0 & -1\\ -21 & 4 & -7\end{bmatrix}$.

Câu 16: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **. Tìm ma trận nghịch đảo** A^{-1}**.**

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

c) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

d) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Câu 17: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -3\\ 7 & -4 & 2\end{bmatrix}$ **. Tìm ma trận nghịch đảo** A^{-1}.

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}8 & -2 & -1\\ 3 & 12 & 24\\ 9 & -23 & -15\end{bmatrix}$.

c) $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}8 & -2 & -1\\ 3 & 14 & -11\\ 9 & -23 & 26\end{bmatrix}$.

b) $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\ 23 & -15 & -11\\ 32 & -23 & -15\end{bmatrix}$.

d) $A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}7 & 3 & -6\\ 15 & 17 & -15\\ 21 & -41 & 31\end{bmatrix}$.

Câu 18: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 2\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$**. Tìm ma trận nghịch đảo** A^{-1}.

a) $A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}13 & -17 & -12\\ 9 & -16 & -10\\ -7 & 10 & 9\end{bmatrix}$.

c) $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}11 & -13 & -14\\ 8 & 21 & -18\\ -5 & 17 & 3\end{bmatrix}$

b) $A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}7 & 23 & 25\\ 9 & -16 & -12\\ 14 & 11 & 9\end{bmatrix}$.

d) $A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}13 & -11 & -32\\ 10 & -19 & -21\\ -9 & 20 & 7\end{bmatrix}$

.

Câu 19: Cho A, B, C **là hai ma trân vuông cùng cấp. Điều nào sau đây không đúng.**

a) Nếu $A^m=0$ thì tồn tại $(I-A)^{-1}=I+A+...+A^{m-1}$.

b) Nếu $A^2-3A+I=0$ thì tồn tại $A^{-1}=3I-A$.

c) Nếu $AB=0$ thì không tồn tại A^{-1}.

d) Nếu $\det A\neq 0$ và $BA=CA$ thì $B=C$.

Câu 20: Tìm hạng $r(A)$ **của ma trận** $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5 & 4\\ 4 & 1 & 4 & m\\ 2 & 3 & 6 & 8\\ 1 & -6 & -9 & -20\end{bmatrix}$

a) $r(A)=\begin{cases}2 & \text{khi } m=1\\ 3 & \text{khi } m\neq 1\end{cases}$.

b) $r(A)=\begin{cases}2 & \text{khi } m=0\\ 3 & \text{khi } m\neq 0\end{cases}$.

c) $r(A)=\begin{cases}3 & \text{khi } m=-1\\ 4 & \text{khi } m\neq -1\end{cases}$.

d) $r(A)=\begin{cases}3 & \text{khi } m=2\\ 4 & \text{khi } m\neq 2\end{cases}$.

Câu 21: Tìm hạng $r(A)$ **của ma trận** $A=\begin{bmatrix}2m & -3 & m^2 & m^2+1\\ 4 & -m & m-2 & 0\\ 5m & m+1 & 0 & 0\\ 3m & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

a) $r(A)=\begin{cases} 3 & \text{khi } m=0, m=-1, m=2 \\ 4 & \text{khi } m\neq 0, m\neq -1, m\neq 2 \end{cases}$.

b) $r(A)=\begin{cases} 3 & \text{khi } m=0, m=1, m=-2 \\ 4 & \text{khi } m\neq 0, m\neq 1, m\neq -2 \end{cases}$.

c) $r(A)=\begin{cases} 2 & \text{khi } m=1, m=2, m=3 \\ 3 & \text{khi } m\neq 1, m\neq 2, m\neq 3 \end{cases}$.

d) $r(A)=\begin{cases} 2 & \text{khi } m=-1, m=1, m=2 \\ 3 & \text{khi } m\neq -1, m\neq 1, m\neq 2 \end{cases}$.

Câu 22: Tìm hạng $r(A)$ của ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) $r(A)=\begin{cases} 1 & \text{khi } m=-1 \\ 3 & \text{khi } m=3 \\ 4 & \text{khi } m\neq -1, m\neq 3 \end{cases}$. b) $r(A)=\begin{cases} 2 & \text{khi } m=2 \\ 3 & \text{khi } m=3 \\ 4 & \text{khi } m\neq 2, m\neq 3 \end{cases}$

c) $r(A)=\begin{cases} 1 & \text{khi } m=-1 \\ 2 & \text{khi } m=2 \\ 4 & \text{khi } m\neq -1, m\neq 2 \end{cases}$. d) $r(A)=\begin{cases} 1 & \text{khi } m=1 \\ 3 & \text{khi } m=-3 \\ 4 & \text{khi } m\neq 1, m\neq -3 \end{cases}$.

Câu 23: Tính định thức cấp n $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

a) $D=2^{n-1}$. b) $D=2(n-1)^n$.

c) $D=(-1)^{n-1}$. d) $D=n^{n-1}$.

Câu 24: Giải phương trình $\begin{vmatrix} 7-x & -12 & 6 \\ 10 & -19-x & 10 \\ 12 & -24 & 13-x \end{vmatrix}=0$

a) $x=0, x=-2, x=3$. b) $x=-1, x=1$.

c) $x=1, x=-2, x=3$. d) $x=-2, x=1$.

Câu 25: Giải phương trình $\begin{vmatrix} 5-x & 7 & -5 \\ 0 & 4-x & -1 \\ 2 & 8 & -3-x \end{vmatrix} = 0$

a) $x=-1, x=-2, x=3$. b) $x=-1, x=3$.

c) $x=1, x=2, x=3$. d) $x=-2, x=1, x=3$.

CHƯƠNG 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Khi khảo sát các hệ tuyến tính thường dẫn đến bài toán giải hệ phương trình tuyến tính. Đối với hệ phi tuyến người ta thường giải quyết bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Vì vậy hệ phương trình tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong thực tế. Cùng với sự phát triển của công nghệ thông tin, nhiều bài toán ứng dụng giải tích toán học ngày càng được mở rộng. Nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau có thể đưa về cùng một vấn đề là giải hệ phương trình tuyến tính. Có thể chỉ ra đây một vài bài toán dạng này:

- Sự phân phối dòng điện trong những sơ đồ có nhiều ghép nối.
- Giải gần đúng những bài toán của lý thuyết thế vị.
- Giải gần đúng một vài bài toán trong các vấn đề bức xạ điện từ.
- Sự phân phối vận tốc các dòng nước trong các hệ thuỷ lực học phức tạp.
- Ứng dụng giải tích thống kê vào tâm lý học, xã hội học và kinh tế học ...

Hệ phương trình tuyến tính đã được biết đến rất sớm. Ở Trung Quốc người ta tìm thấy một cuốn sách có khoảng từ năm 500 trước công nguyên, trong đó có những chỉ dẫn về việc dùng một bàn tính để giải các hệ phương trình tuyến tính qua các ví dụ cụ thể. Phương pháp giải này chính là thuật toán khử Gauss. Ở châu Âu thuật toán này đã được mô tả trong công trình của Buteo (Pháp) năm 1550, trước Gauss hơn hai thế kỷ. Một phương pháp khác để giải hệ phương trình tuyến tính là sử dụng định thức của Cramer.

Thoạt tiên ta có thể thấy rằng hình như vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính đã cũ rồi và có thể giải quyết bằng những phương tiện tính toán sơ cấp quen biết. Tuy nhiên để giải các bài toán nêu ra ở trên ta thường phải khảo sát khoảng từ 150 đến 200 phương trình đồng thời. Tình trạng ấy trong thực hành đã gây ra nhiều khó khăn lớn đến nỗi hầu như không thể giải quyết nổi nếu chỉ dùng phương pháp sơ cấp. Với sự hỗ trợ của máy tính và các thuật toán mới đã khiến cho hệ phương trình tuyến tính được ứng dụng hiệu quả để giải quyết các bài toán thực tế.

Một hệ phương trình tuyến tính có thể viết dưới dạng ma trận, dưới dạng một véc tơ là một tổ hợp tuyến tính của một hệ các véc tơ khác hoặc biểu thức toạ độ của một ánh xạ tuyến tính (chương 6).

Nếu ta ký hiệu các hệ số của hệ m phương trình có n ẩn thành một ma trận cỡ $m \times n$, các ẩn thành ma trận cột $n \times 1$, các hệ số vế sau thành ma trận cột $m \times 1$ thì hệ phương trình đã cho có thể biểu diễn dưới dạng ma trận. Với cách biểu diễn này ta thấy nếu ma trận các hệ số khả nghịch thì hệ phương trình có duy nhất nghiệm (hệ Cramer).

Nếu ta xét n+1 véc tơ có m thành phần trong đó n véc tơ đầu là các hệ số ứng với các ẩn còn véc tơ thứ n+1 là hệ số của vế sau của hệ phương trình. Khi đó hệ phương trình được biểu diễn dưới dạng véc tơ, vế sau là một tổ hợp tuyến tính của n véc tơ các hệ số. Với cách biểu diễn này thì hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi véc tơ vế sau thuộc vào không gian con sinh bởi n véc tơ của các hệ số.

Điều này cho thấy ta có thể giải quyết một bài toán hệ phương trình tuyến tính bằng ma trận, tổ hợp tuyến tính, hạng của hệ véc tơ, ánh xạ tuyến tính ... và ngược lại. Vì vậy khi học chương này đòi hỏi học viên thấy được mối liên hệ giữa các khái niệm trên để giải quyết bài toán một cách linh hoạt. Học viên cần nắm vững và vận dụng thành thạo hai phương pháp: Cramer và phép khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.

Phương pháp Cramer là sử dụng định thức để giải hệ phương trình, khi Cramer đưa ra quy tắc này thì nó trở thành "mốt" trong các công trình về toán ứng dụng trong một thời gian dài. Tuy nhiên phương pháp khử của Gauss đôi khi tỏ ra đơn giản hơn. Giải bài toán theo phương pháp khử của Gauss là sử dụng các phép biến đổi tương đương lên các phương trình của hệ để đưa hệ phương trình cần giải về hệ tương đương đơn giản hơn mà ta dễ dàng tìm được nghiệm. Thực chất của phương pháp này là sử dụng các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận hệ số của hệ phương trình.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất liên quan đến nhân của ánh xạ tuyến tính được khảo sát trong chương 6.

5.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

5.2.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{Hay } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ , i = 1, ..., m}$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là n ẩn,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; i = 1,..., n; j = 1,..., m.

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất.

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$AX = B$

5.2.2 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận A là $v_i = (a_{1i}, ..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ và véc tơ vế sau $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, thì hệ (5.1) được viết dưới dạng véc tơ:

$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = b$

5.2.3 Hệ Cramer

Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số A không suy biến được gọi là hệ Cramer. Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm.

Cụ thể hệ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, ..., n có nghiệm $x_i = D_i / D$, i = 1,..., n;

Trong đó $D = \det A = D_{\mathcal{B}}\{v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n\}$

$D_i = D_{\mathcal{B}}\{v_1, ..., v_{i-1}, b, v_{i+1}, ..., v_n\}$

D_i là định thức của hệ các véc tơ cột là các hệ số của hệ phương trình nhưng véc tơ cột thứ i được thay bởi véc tơ cột vế sau.

5.2.4 Định lý tồn tại nghiệm (Kronecker-Kapelli)

Hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A)=r(\widetilde{A})$ trong đó $\widetilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

5.2.5 Cách giải (Cramer)

Giả sử hệ phương trình đã cho tương đương với p phương trình đầu

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pn}x_n=b_p \end{cases}$$

Giả sử $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$ (trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự)

Hệ phương trình trên được viết lại:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1p}x_p=b_1-a_{1p+1}x_{p+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2p}x_p=b_2-a_{2p+1}x_{p+1}-\ldots-a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pp}x_p=b_p-a_{pp+1}x_{p+1}-\ldots-a_{pn}x_n \end{cases}$$

đây là hệ Cramer có vế sau phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},\ldots,x_n$. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $x_{p+1},\ldots,x_n$.

5.2.6 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss

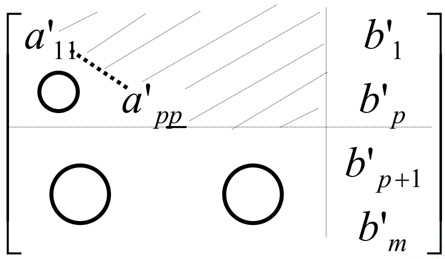
Thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình:

✓ Đổi chỗ hai phương trình;

✓ Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;

✓ Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Để đưa hệ phương trình đã cho về hệ tương đương mà ma trận bổ sung của hệ mới có dạng



5.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1:

Cho hệ phương trình tuyến tính $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, ..., m , có ma trận hệ số $A=\begin{bmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$ và ma trận bổ sung $\widetilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$,

các véc tơ hệ số tương ứng $v_i=(a_{1i},...,a_{mi})\in\mathbb{R}^m, i=1,...,n$ và véc tơ vế sau $b=(b_1,...,b_m)\in\mathbb{R}^m$. Điều nào sau đây không đúng.

a) Hệ phương trình có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi $n=m, \det A\neq 0$.

b) Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A)=r(\widetilde{A})$.

c) Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $b\in \operatorname{span}\{v_1,...,v_n\}$.

d) Nếu $r(A)=p$ thì không gian nghiệm có chiều là $n-p$.

Câu 2: Phép biến đổi nào sau đây không phải là phép biến đổi tương đương của hệ phương trình.

a) Thay đổi vị trí của hai phương trình của hệ.

b) Nhân một số bất kỳ vào cả 2 vế của một phương trình của hệ.

c) Cộng một phương trình vào một phương trình khác của hệ (vế với vế).

d) Trừ một phương trình vào một phương trình khác của hệ.

Câu 3: Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm

$$\begin{cases}(m-1)x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+(m-1)x_2+x_3+x_4=2\\ x_1+x_2+(m-1)x_3+x_4=3\\ x_1+x_2+x_3+(m-1)x_4=4\end{cases}$$

a) $m\neq\pm2$.

b) $m\neq1;\ m\neq3$.

c) $m\neq-3;\ m\neq1$.

d) $m\neq-2;\ m\neq3$.

Câu 4: Tìm các điều kiện của a, b, c, d thì hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ ax+by+cz=d\\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2\end{cases}$$

a) a, b, c, d khác nhau từng đôi một.

b) a, b, c khác nhau từng đôi một và d tuỳ ý.

c) a, b, c khác nhau từng đôi một và $d=1$.

d) a, b, c khác nhau từng đôi một và khác 1, d tuỳ ý.

Câu 5: Cho hệ phương trình tuyến tính phụ thuộc tham số m

$$\begin{cases}mx+y+z=1\\ x+my+z=m\\ x+y+mz=m^2\end{cases}$$

Điều nào sau đây không đúng

a) Nếu $m\neq1$ và $m\neq-2$ thì hệ có duy nhất nghiệm.

b) Nếu $m=0$ thì hệ có vô số nghiệm.

c) Nếu $m=1$ thì hệ có vô số nghiệm.

d) Nếu $m=-2$ thì hệ vô nghiệm.

Câu 6: Cho hệ phương trình tuyến tính: $\begin{cases} 9x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

Tính các định thức D, D_1, D_2, D_3

a) $D=22, D_1=16, D_2=-6, D_3=19$.

b) $D=13, D_1=-16, D_2=14, D_3=19$.

c) $D=42, D_1=-36, D_2=6, D_3=90$.

d) $D=45, D_1=17, D_2=-13, D_3=35$.

Câu 7: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$

a) $x_1=2, x_2=1, x_3=-3, x_4=1$.

b) $x_1=-3, x_2=1, x_3=2, x_4=-1$.

c) $x_1=-3, x_2=-1, x_3=2, x_4=-1$.

d) $x_1=4, x_2=-5, x_3=7, x_4=3$.

Câu 8: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 13x_4 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

a) $x_1=-1-8x_4, x_3=0, x_2=1+2x_4$.

b) $x_1=-1-8x_4, x_3=1, x_2=1+2x_4$.

c) $x_2=-1-8x_1, x_3=0, x_4=1+2x_1$.

d) $x_3 = -1 - 8x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1 + 2x_1 - 5x_2$.

Câu 9: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 3 - 2x_4$, $x_3 = 4 - 2x_4$.

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$.

c) $x_1 = 1$, $x_2 = 3 - 2x_3$, $x_4 = 4 + 2x_3$.

d) $x_1 = 3 + 5x_4$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3 - x_4$.

Câu 10: Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

Tìm câu trả lời đúng nhất

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$ là một nghiệm của hệ.

b) $x_1 = 1/7$, $x_2 = 15/7$, $x_3 = 0$, $x_4 = -6/7$ là một nghiệm của hệ.

c) $x_1 = -11$, $x_2 = -3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 6$ là một nghiệm của hệ.

d) Các trường hợp trên đều là nghiệm của hệ.

Câu 11: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$

a) $x_1 = 2 + x_3 + 7x_4$, $x_2 = -1 + 5x_3 - x_4$.

b) $x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4$, $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$.

c) $x_1 = 2 + 6x_3 - 7x_4$, $x_2 = -1 + 4x_3 - 2x_4$.

d) $x_1 = 4 + 11x_4$, $x_2 = -1 - 6x_4$, $x_{3=2}$.

Câu 12: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

a) $x_1 = 1 + 2x_4,\ x_2 = 3 - 2x_4,\ x_3 = 4 - 2x_4$.

b) $x_1 = 0,\ x_2 = 1 + 7x_4,\ x_3 = -2 - 5x_4$.

c) $x_1 = -4,\ x_2 = -6 + 3x_3,\ x_4 = 7 - 9x_3$.

d) Hệ vô nghiệm

Câu 13: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 + mx_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} m = -3 \Rightarrow x_1 = 3/2 - 3/2x_2 - 1/2x_4;\ x_3 = 1/5 + 4/5x_4 \\ m \neq -3 \Rightarrow x_1 = 5/2 - 3/2x_2;\ x_3 = 0;\ x_4 = -1/4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} m = -9 \Rightarrow x_1 = 3/5 - 3/2x_2 - 1/10x_4;\ x_3 = 1/5 + 4/5x_4 \\ m \neq -9 \Rightarrow x_1 = 8/5 - 3/2x_2;\ x_3 = 0;\ x_4 = -1/4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} m = -1 \Rightarrow x_1 = 3 - 2x_2 - 10x_4;\ x_3 = 5 + 7x_4 \\ m \neq -1 \Rightarrow x_1 = 5 - 3x_2;\ x_3 = 0;\ x_4 = -1. \end{cases}$

d) Hệ vô nghiệm

Câu 14: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 9x_1 - 4x_2 + mx_3 + 10x_4 = 11 \\ 7x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 9 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} m = 8 \Rightarrow x_1 = 3 - 2x_4 \,;\, x_2 = 4 + 2x_3 - 2x_4 \\ m \neq 8 \Rightarrow x_1 = 3 - 2x_4 \,;\; x_2 = 4 - 2x_4 \,;\, x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} m = 6 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm} \\ m \neq 6 \Rightarrow x_1 = 5 + 3x_4 \,;\; x_2 = 4 + x_4 \,;\, x_3 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} m = 6 \Rightarrow x_1 = 5 + 3x_4 \,;\, x_2 = 4 + 2x_3 - 2x_4 \\ m \neq 6 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} m = -4 \Rightarrow x_1 = 7 + 2x_4 \,;\, x_2 = -2 + x_3 - 2x_4 \\ m \neq -4 \Rightarrow x_1 = 7 + 2x_4 \,;\; x_2 = -2 - 2x_4 \,;\, x_3 = 0. \end{cases}$

Câu 15: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ \text{m}x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} m = -8 \Rightarrow x_1 = 2 - 3x_2 \,;\, x_3 = -5;\, x_4 = 0 \\ m \neq -8 \Rightarrow x_1 = 0;\, x_2 = 2/3;\, x_3 = -5;\, x_4 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} m = 8 \Rightarrow x_1 = 2 - 3x_2 \,;\, x_3 = -1;\, x_4 = 0 \\ m \neq 8 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} m = 6 \Rightarrow x_1 = 2 - 3/2x_2 \,;\, x_3 = -1;\, x_4 = 0 \\ m \neq 6 \Rightarrow x_1 = 0;\, x_2 = 4/3;\, x_3 = -1;\, x_4 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} m = 4 \Rightarrow x_2 = 7 - 2/3x_1 \,;\, x_3 = 0;\, x_4 = 3 \\ m \neq 4 \Rightarrow x_1 = 21/2;\, x_2 = 0;\, x_3 = 0;\, x_4 = 3. \end{cases}$

Câu 16: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + mx_2 + 4x_3 + 5x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases}$$

a) Hệ vô nghiệm.

b)

$$\begin{cases} m=18 \text{ hệ vô nghiệm} \\ m\neq 18 \Rightarrow x_1=\dfrac{13}{5}-\dfrac{17}{5(m-18)};\ x_2=\dfrac{1}{m-18};\ x_3=0;\ x_4=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5(m-18)}. \end{cases}$$

c) $\begin{cases} m=7 \text{ hệ vô nghiệm} \\ m\neq 7 \Rightarrow x_1=4-\dfrac{11}{(m-7)};\ x_2=\dfrac{1}{m-7};\ x_3=0;\ x_4=3-\dfrac{1}{(m-7)}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} m=5 \Rightarrow x_1=3-\dfrac{2}{m-5}+x_3;\ x_2=\dfrac{1}{m-5};\ x_3=0;\ x_4=1-\dfrac{1}{m-5} \\ m\neq 5 \Rightarrow x_1=3-\dfrac{2}{m-5};\ x_2=\dfrac{1}{m-5};\ x_3=0;\ x_4=1-\dfrac{1}{m-5}. \end{cases}$

Câu 17: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+\ 3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+mx_4=7 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+\ 5x_4=4 \\ 4x_1+14x_2+x_3+\ 7x_4=4 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} m=7 \Rightarrow x_1=3-x_2-\dfrac{4}{m-7};\ x_3=3x_2+\dfrac{5}{m-7};\ x_4=\dfrac{2}{m-7} \\ m\neq 7 \Rightarrow x_1=3-\dfrac{4}{m-7};\ x_2=0;\ x_3=\dfrac{5}{m-7};\ x_4=\dfrac{2}{m-7}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} m=3 \Rightarrow x_1=1-3x_2-\dfrac{5}{m-3};\ x_3=4x_2+\dfrac{3}{m-3};\ x_4=\dfrac{3}{m-3} \\ m\neq 3 \text{ hệ vô nghiệm}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} m=-1 \text{ hệ vô nghiệm} \\ m\neq -1 \Rightarrow x_1=1-3x_2-\dfrac{5}{m+1};\ x_3=4x_2+\dfrac{3}{m+1};\ x_4=\dfrac{3}{m+1}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} m=1 \text{ hệ vô nghiệm} \\ m\neq 1 \Rightarrow x_1=1-\dfrac{9}{2}x_2-\dfrac{10}{m-1};\ x_3=4x_2+\dfrac{5}{m-1};\ x_4=\dfrac{5}{m-1}. \end{cases}$

Câu 18: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + \ \ 4x_4 = 3 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = m \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \ \ 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - \ \ x_3 - \ \ 5x_4 = 9 \end{cases}$$

a) Hệ vô nghiệm.

b) $\begin{cases} m \neq 0 \quad \text{hệ vô nghiệm} \\ m = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-5x_3 - 13x_4 - 3}{2};\ x_2 = \dfrac{-7x_3 - 19x_4 - 7}{2}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} m = 9 \quad \text{hệ vô nghiệm} \\ m \neq 9 \Rightarrow x_3 = \dfrac{2x_1 + 11x_2 - 3}{2};\ x_4 = \dfrac{-5x_1 + 21x_2 - 7}{2}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} m \neq 4 \quad \text{hệ vô nghiệm} \\ m = 4 \Rightarrow x_1 = \dfrac{3x_3 + 5x_4 - 3}{2};\ x_2 = \dfrac{-7x_3 + 13x_4 + 5}{2}. \end{cases}$

Câu 19: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 + 20x_2 - x_3 + 9x_4 = 12 \\ 3x_1 + \ 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ 2x_1 + \ 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Hệ vô nghiệm với mọi m.

b) $\begin{cases} m = 8 \Rightarrow x_1 = 2 - 3x_2;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0 \\ m \neq 8 \Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} m = 6 \Rightarrow x_1 = 2 - 3/2x_2;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0 \\ m \neq 6 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 4/3;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} m = 4 \Rightarrow x_2 = 7 - 2/3x_1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 3 \\ m \neq 4 \Rightarrow x_1 = 21/2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 3. \end{cases}$

Câu 20: Tìm x, y, z sao cho có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính sau

$(2,-5,3) = x(1,-3,2) + y(2,-4,-1) + z(1,-5,7)$.

a) $x = -2,\ y = 1,\ z = -5$.

b) $x = -1,\ y = 4,\ z = -6$.

c) Không tồn tại x, y, z.

d) $x = 3,\ y = 11,\ z = -4$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị m sao cho có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính sau

$(7,-2,m) = x(2,3,5) + y(3,7,8) + z(1,-6,1)$.

a) $m = 11$.

b) $m = 15$.

c) $m \neq 11$.

d) $m = -21$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị m sao cho có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính sau

$(1,3,5) = x(3,2,5) + y(2,4,7) + z(5,6,m)$.

a) $m = -10$.

b) $m = 25$.

c) $m \neq 11$.

d) $m \neq 10$.

Câu 23: Tìm các điều kiện của a, b, c để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

a) $5b = 2a + c$.

b) $5a = 2b + c$.

c) $a = 5b + 2c$.

d) $a = 2b - 7c$.

Câu 24: Tìm các điều kiện của a, b, c để $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ thuộc vào không gian con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các véc tơ $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (1,-1,2)$, $v_3 = (0,3,-4)$.

a) $2a = 4b + 3c$.

b) $a = 2b - 3c$.

c) $a = 5b + 7c$.

d) $b = 3a - 5c$.

Câu 25: Tìm một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

a) $\{(7,-5,1,1); (4,2,0,1)\}$

b) $\{(3,-2,1,0); (-1,3,0,1)\}$

c) $\{(8,-6,1,0); (-7,5,0,1)\}$

d) $\{(7,-5,3,5); (2,1,0,-7)\}$

Câu 26: Đặt V_1, V_2 lần lượt là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ gồm các véc tơ $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thoả mãn hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}, \quad (I)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 10x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm số chiều của các không gian con V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.

a) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$, $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, $\dim V_1 + V_2 = 4$.

b) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_1 \cap V_2 = 1$, $\dim V_1 + V_2 = 3$.

c) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, $\dim V_1 + V_2 = 2$.

d) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_1 \cap V_2 = 1$, $\dim V_1 + V_2 = 4$.

Câu 27: Đặt V_1, V_2 lần lượt là hai không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$ gồm các véc tơ $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thoả mãn hệ phương trình (I) và hệ phương trình (II):

$$(I)\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}, \qquad (II)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm số chiều của các không gian con $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

a) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$, $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, $\dim V_1 + V_2 = 4$.

b) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$, $\dim V_1 \cap V_2 = 1$, $\dim V_1 + V_2 = 3$.

c) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, $\dim V_1 + V_2 = 4$.

d) $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_1 \cap V_2 = 1$, $\dim V_1 + V_2 = 3$.

Câu 28: Giải phương trình : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

a) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 29: Giải phương trình : $X\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

a) $X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

c) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

d) $X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Câu 30: Giải phương trình $AX = B$ với ẩn là ma trận X, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) $X = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

c) $X = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

CHƯƠNG 6: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

6.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Ánh xạ tuyến tính (biến đổi tuyến tính) từ một không gian véc tơ này vào không gian véc tơ kia là ánh xạ bảo toàn phép cộng véc tơ và phép nhân một số với véc tơ. Ánh xạ tuyến tính là một nội dung chính của đại số tuyến tính. Một ánh xạ tuyến tính từ một không gian véc tơ vào chính không gian đó được gọi là tự đồng cấu tuyến tính (gọi tắt là tự đồng cấu) hay toán tử tuyến tính. Nhà toán học Peano (Italia) là người đầu tiên đưa ra khái niệm ánh xạ tuyến tính (1888).

Ánh xạ tuyến tính còn bảo toàn các không gian con qua các tập ảnh và ảnh ngược. Nghĩa là ảnh qua ánh xạ tuyến tính của một không gian con là một không gian con, ảnh ngược của không gian con cũng là không gian con. Đặc biệt ảnh $f(V)$ của ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ là không gian con của W được gọi là ảnh của f. Còn ảnh ngược $f^{-1}\{0\}$ là không gian véc tơ con của V được gọi là nhân của f. Chiều của không gian véc tơ ảnh $f(V)$ được gọi là hạng của f.

Ánh xạ tuyến tính và đơn ánh được gọi là đơn cấu, toàn ánh được gọi là toàn cấu, song ánh được gọi là đẳng cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu từ không gian này lên không gian kia thì ta nói hai không gian đó đẳng cấu. Có những tiêu chuẩn riêng để nhận biết một ánh xạ tuyến tính là toàn cấu, đơn cấu hay đẳng cấu. Một ánh xạ tuyến tính là toàn cấu khi và chỉ khi hạng của nó bằng chiều của không gian đích. Một ánh xạ tuyến tính là đơn cấu khi và chỉ khi nhân của nó chỉ gồm véc tơ không. Ánh xạ tuyến tính từ một không gian véc tơ vào một không gian véc tơ cùng chiều là toàn cấu khi và chỉ khi là đơn cấu (do đó là đẳng cấu), điều này cũng giống như ánh xạ giữa hai tập hữu hạn có cùng số phần tử.

Một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi ảnh của cở sở bất kỳ qua ánh xạ này. Vì vậy khi đã cho cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của V và cơ sở $\mathscr{B}'$ của W thì ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận của hệ véc tơ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$. Điều này giải thích tại sao đại số tuyến tính thường được xem là lý thuyết ma trận. Ma trận của tổng hai ánh xạ tuyến tính bằng tổng hai ma trận, ma trận của tích một số với một ánh xạ tuyến tính bằng tích của số này với ma trận xác định ánh xạ tuyến tính, ma trận của hợp hai ánh xạ tuyến tính bằng tích hai ma trận của chúng. Nói cách khác tương ứng giữa ánh xạ tuyến tính và ma trận của nó là một đẳng cấu bảo toàn phép cộng, phép nhân một số với ma trận và phép nhân hai ma trận. Hạng của ánh xạ tuyến tính bằng hạng của ma trận của nó. Ma trận của một tự đồng cấu trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Chính vì lý do này nên một bài toán về ma trận có thể giải quyết bằng phương pháp ánh xạ tuyến tính và ngược lại.

Công thức xác định ảnh của một ánh xạ tuyến tính có biểu thức toạ độ là một hệ phương trình tuyến tính. Tìm véc tơ thuộc không gian ảnh tương ứng với tìm điều kiện của vế sau để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm. Nhân của ánh xạ tuyến tính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất xác định ánh xạ này.

Một vấn đề quan trọng của lý thuyết ma trận là chéo hoá ma trận, đó là tìm một ma trận đồng dạng của ma trận cho trước mà ma trận đồng dạng này có dạng chéo. Vấn đề này tương đương với việc tìm một cơ sở gồm các véc tơ riêng của tự đồng cấu xác định bởi ma trận đã cho. Thuật toán chéo hoá ở cuối chương sẽ giúp học viên giải quyết được bài toán dạng này. Bài toán chéo hóa ma trận có rất nhiều ứng dụng. Bài toàn chéo hóa trực giao ma trận được xét trong chương 7.

6.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

6.2.1 Ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian W thoả mãn:

(i) với mọi $u,v\in V$; $f(u+v)=f(u)+f(v)$

(ii) với mọi $u,v\in V$, $\alpha\in\mathbb{R}$; $f(\alpha u)=\alpha f(u)$

được gọi là ánh xạ tuyến tính

Khi $V=W$ thì f được gọi là tự đồng cấu hay toán tử tuyến tính.

Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là $\text{Hom}(V,W)$ hay $L(V,W)$. Ta xác định hai phép toán "$+,\cdot$" trên tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W. Với hai phép toán này thì $(\text{Hom}(V,W),+,\cdot)$ có cấu trúc không gian véc tơ và $\dim \text{Hom}(V,W)=\dim V\cdot\dim W$.

Tập các tự đồng cấu của V, ký hiệu $\text{End}V$, với hai phép toán cộng và hợp ánh xạ thì $(\text{End}V,+,\circ)$ là một vành không giao hoán, có đơn vị , không nguyên. Ngoài ra với hai phép toán "$+,\cdot$" thì $(\text{End}V,+,\cdot)$ còn là một không gian véc tơ.

6.2.2 Nhân và ảnh

Với ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$ ta ký hiệu và định nghĩa $\mathrm{Ker}f=f^{-1}\{0\}$ là hạt nhân và $\mathrm{Im}\, f=f(V)$ là ảnh của f. Chiều của $\mathrm{Im}\, f$ được gọi là hạng của ánh xạ f, ký hiệu $r(f)$.

$\dim V=r(f)+\dim \mathrm{Ker}f$

6.2.3 Toàn cấu, đơn cấu, đẳng cấu

Ánh xạ tuyến tính mà toàn ánh được gọi là toàn cấu.

Ánh xạ tuyến tính mà đơn ánh được gọi là đơn cấu.

Ánh xạ tuyến tính và song ánh được gọi là đẳng cấu.

Hai không gian V,W được gọi là đẳng cấu nếu có ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $f:V\to W$.

6.2.4 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$.

Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V. $\mathscr{B}'=\{\omega_1,...,\omega_m\}$ là một cơ sở của W. Ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ của hệ véc tơ $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f ứng hai cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$.

Nếu $(x_1,...,x_n)$ là toạ độ của $v\in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$(y_1,...,y_m)$ là toạ độ của $f(v)\in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ thì

$$\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n\\ ....\\ y_m=a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n\end{cases}$$

được gọi là biểu thức toạ độ của ánh xạ tuyến tính f.

Tương ứng $\quad \mathrm{Hom}(V,W)\to \mathscr{M}_{m\times n}$

$\qquad f \mapsto A$

là một đẳng cấu tuyến tính và $r(f)=r(A)$.

6.2.5 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính.

Gọi T là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'_1 = \{e'_1, ..., e'_n\}$ của không gian V.

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}_2 = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'_2 = \{\omega'_1, ..., \omega'_m\}$ của W.

A là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$, A' là ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2$

Thì $$A' = P^{-1} A T$$

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V. Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì:

$$A' = T^{-1} A T$$

6.2.6 Không gian riêng, giá trị riêng, véc tơ riêng

Véc tơ $v \in V$, $v \neq 0$ sao cho $f(v) = \lambda v$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của tự đồng cấu f.

Nếu λ là giá trị riêng thì $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_V)$ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

λ_0 là giá trị riêng của f khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng

$$P(\lambda) := \det(f - \lambda id_V) = \det(A - \lambda I)$$

Tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f chéo hoá được.

Giả sử đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f chỉ có các nghiệm thực: $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} ... (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ với $m_1 + ... + m_k = n$ và các $\lambda_1, ..., \lambda_k$ khác nhau từng đôi một. Khi đó f chéo hoá được khi và chỉ khi với mọi $i = 1, ..., k$:

$$\dim V_{\lambda_i} = m_i.$$

Vậy chéo hoá ta cần thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$P(\lambda) := \det\left(f - \lambda id_V\right) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} ... (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_i ta tìm các véc tơ riêng $v = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ có $\left(x_1, ..., x_n\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\left[A - \lambda_i I\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tập hợp nghiệm là không gian con d_i chiều; $d_i = n - r\left(A - \lambda_i I\right)$.

Nếu $d_i < m_i$ với i nào đó, $1 \le i \le k$ thì f không hoá chéo được.

Nếu $d_i = m_i$ thì ta chọn m_i véc tơ độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng λ_i, với mọi $i = 1, ..., k$. Hệ gồm $m_1 + ... + m_k = n$ các véc tơ riêng này là cơ sở $\mathscr{B}'$ cần tìm.

6.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1: Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f(x, y) = (x^2, y)$.

b) $f(x, y) = (y, x)$.

c) $f(x, y) = (x, y + 1)$.

d) $f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$.

Câu 2: ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nào dưới đây không phải là ánh xạ tuyến tính:

a) $f(x, y) = (-2x, x + y, x - 3y)$.

b) $f(x, y) = (y, 0, -x)$.

c) $f(x,y)=(x,y,xy)$.

d) $f(x,y)=(a_1x+b_1y, a_2x+b_2y, a_3x+b_3y)$.

Câu 3: ánh xạ $f:\mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=a+d$.

b) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

c) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=2a+3b+c-d+1$.

d) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=a^2+d^2$.

Câu 4: ánh xạ $f:P_2 \to P_2$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

a) $f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_0+(a_1+a_2)x+(2a_0-3a_1)x^2$.

b) $f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2$.

c) $f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_2+a_0x$.

d) $f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=(a_0+1)+a_1x+a_2x^2$.

Câu 5: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1,0,0)=(1,1)$, $f(0,1,0)=(3,0)$, $f(0,0,1)=(4,-7)$. Điều nào sau đây đúng:

a) Ma trận chính tắc của f là $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$.

b) $f(1,3,2)=(-13,18)$.

c) $f(x,y,z)=(x+3y+4z, x-7z)$.

d) Với mọi $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)\neq(0,0)$.

Câu 6: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **có ma trận chính tắc** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$. Véc tơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Im} f$:

a) $(1,4)$.

b) $(-3,12)$.

c) $(4,-1)$.

d) $(14,-2)$.

Câu 7: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **có ma trận chính tắc** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$**.** Véc tơ nào sau đây thuộc $\operatorname{Ker} f$:

a) $(1,4,0)$.

b) $(1,1,-2)$.

c) $(6,4,3)$.

d) $(2,0,-4)$.

Câu 8: Xét ánh xạ tuyến tính $D:P_2 \to P_2$ **xác định bởi công thức** $D(p)=p'$**, cho tương ứng đa thức** p **với đạo hàm** p' **của nó. Điều nào sau đây không đúng:**

a) Ma trận chính tắc của D là $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) D là một toàn cấu.

c) Hạng của D là $r(D)=2$.

d) $\dim KerD = 1$.

Câu 9: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ **có công thức xác định ảnh** $f(x,y,z,t)=(x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t)$

Hệ véc tơ nào sau đây không là một cơ sở của $\operatorname{Im} f$ **.**

a) $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(0,1,2)$.

b) $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (0,1,2)$.

c) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2)$.

d) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$.

Câu 10: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ có công thức xác định ảnh $f(x,y,z,t) = (x+3y-z+2t, 11y-5z+3t, 2x-5y+3z+t, 4x+y+z+5t)$

Tìm hạng $r(f)$ và $\dim \mathrm{Ker} f$ **.**

a) $r(f) = 3$ và $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

b) $r(f) = 2$ và $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

c) $r(f) = 3$ và $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

d) $r(f) = 2$ và $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

Câu 11: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh $f(x,y,z,t) = (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t)$

Hệ véc tơ nào sau đây là một cơ sở của $\mathrm{Ker} f$.

a) $u_1 = (3,1,-1,4)$, $u_2 = (1,-2,5,1)$.

b) $u_1 = (-3,1,-1,5)$, $u_2 = (1,-2,6,1)$.

c) $u_1 = (2,1,-1,0)$, $u_2 = (1,2,0,1)$.

d) $u_1 = (-3,1,-1,5)$, $u_2 = (1,-2,6,1)$, $u_3 = (1,2,0,1)$.

Câu 12: Xét ánh xạ tuyến tính $T : P_2 \to P_3$ xác định bởi công thức $T(p(x)) = xp(x)$**. Điều nào sau đây không đúng**

a) T đơn cấu.

b) T toàn cấu.

c) $x + 2x^2 + 3x^3$ thuộc $\mathrm{Im} T$.

d) Ma trận của T trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 13: Ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính có không gian ảnh sinh bởi hai véc tơ $v_1 = (1,2,0,-4)$, $v_2 = (2,0,-1,-3)$.

a) $f(x,y,z) = (x+2y,\ 2x,\ -y,\ -4x-3y)$.

b) $f(x,y,z) = (x+2y+z,\ 2x+y-z,\ x-y,\ 4x-y+3z)$.

c) $f(x,y,z) = (x+z,\ y-z,\ x-y,\ 4x-3z)$.

d) $f(x,y,z) = (3x+2y+z,\ x+2y-z,\ x-3y,\ 4x)$.

Câu 14: Cho ma trận vuông cấp hai $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$, $f:\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi $f(A) = AM - MA$. Tìm một cơ sở của nhân của f.

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Câu 15: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ có hạng $r(f) = 4$. Điều nào sau đây đúng.

a) Không gian nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ có chiều bằng 1.

b) Không gian nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ có chiều bằng 3.

c) Với mọi $y \in \mathbb{R}^5$, phương trình $f(x) = y$ luôn có nghiệm.

d) Các điều trên đều sai.

Câu 16: Cho hai ánh xạ tuyến tính $f, g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh

$f(x,y,z)=(2x,y+z)$, $g(x,y,z)=(x-z,y)$. Tìm công thức xác định $2f-5g$

a) $(2f-5g)(x,y,z)=(-x+5z,-3y+2z)$.

b) $(2f-5g)(x,y,z)=(2x-y+5z,5x+4y+2z)$.

c) $(2f-5g)(x,y,z)=(5x+y-3z,2x-3y+2z)$.

d) $(2f-5g)(x,y,z)=(2x+y+5z,-3x-y+2z)$.

Câu 17: Cho hai ánh xạ tuyến tính $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$f(x,y,z)=(x+y+z,y,-z)$, $g(x,y,z)=(0,x-y,x-z)$. Tìm công thức xác định $g\circ f(x,y,y)$.

a) $g\circ f(x,y,y)=(x+2y-z,y+2z,2x-y+3z)$.

b) $g\circ f(x,y,y)=(x+z,x+y,y+z)$.

c) $g\circ f(x,y,y)=(2x+4z,2z,2y-6z)$.

d) $g\circ f(x,y,y)=(3x+2y-5z,y+6z,2x-y-7z)$.

Câu 18: Ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh nào sau đây không là một đẳng cấu.

a) $f(x,y,z)=(x+z,y+z,x+y+z)$.

b) $f(x,y,z)=(-x+y+z,x-y+z,x+y-z)$.

c) $f(x,y,z)=(3x+2y+8z,3x+y+4z,x+3y)$.

d) $f(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$.

Câu 19: ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh

$f(x,y,z)=(2x,4x-y,2x+3y-z)$ là một đẳng cấu. Tìm công thức xác định ảnh của ánh xạ ngược $f^{-1}(x,y,z)$.

a) $f^{-1}(x,y,z)=(2x,2x-7y+3z,7x-3y+z)$.

b) $f^{-1}(x,y,z)=(x,2x-4y-z,7x-3y+2z)$.

c) $f^{-1}(x,y,z)=(x/2,2x-y,7x-3y-z)$.

d) $f^{-1}(x,y,z)=(2x,4x-2y,5x-3y-z)$.

Câu 20: Tự đồng cấu tuyến tính f có ma trận trong cơ sở $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$

là $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Tìm ma trận của f trong cơ sở $\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4\}$.

a) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

b) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -8 & -7\\ 1 & 4 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 7\end{bmatrix}$.

c) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

d) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -6 & -5 & -7\\ 3 & -1 & 8 & 2\\ 1 & 5 & 6 & 9\end{bmatrix}$.

Câu 21: Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2\to P_3$ xác định bởi $f(p)=(ax+b)p$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}=\{x^2,x,1\}$ của P_2 và $\mathscr{B}'=\{x^3,x^2,x,1\}$ của P_3.

a) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$.

Câu 22: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận của *f* trong cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$;

$v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(1,0,0)$.

a) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

c) $A'=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Câu 23: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f((1,2,3)) = (1,0)$, $f((2,5,3)) = (1,0)$, $f((1,0,10)) = (0,1)$. Tìm công thức xác định ảnh $f(x,y,z)$.

a) $f(x,y,z) = (6x - 20y + 5z, -9x + 3y + z)$.

b) $f(x,y,z) = (6x - 10y + 5z, 19x + 3y + 23z)$.

c) $f(x,y,z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$.

d) $f(x,y,z) = (13x + 8y - 3z, 9x - 13y + 7z)$.

Câu 24: Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2 \to P_2$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ trong cơ sở $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$;

$v_1 = 3x + 3x^2$, $v_2 = -1 + 3x + 2x^2$, $v_3 = 3 + 7x + 2x^2$. Tìm $f(1 + x^2)$.

a) $f(1 + x^2) = 9 + x + 8x^2$.

b) $f(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$.

c) $f(1 + x^2) = 13 + 25x - 4x^2$.

d) $f(1 + x^2) = -14 + 19x + 11x^2$.

Câu 25: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận trong cơ sở

$\mathscr{B} = \{(0,1,1),(1,0,1),((1,1,0)\}$ **của $\mathbb{R}^3$ và** $\mathscr{B}' = \{(1,1),(1,-1)\}$ **của $\mathbb{R}^2$ là**

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. **Tìm công thức xác định ảnh $f(x,y,z)$.**

a) $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(9x + 15y - 3z, 5x + 3y - 3z)$.

b) $f(x,y,z)=\frac{1}{3}(6x-10y+5z,19x+3y+23z)$.

c) $f(x,y,z)=2(13x+8y-3z,9x-13y+7z)$.

d) $f(x,y,z)=(30x-10y-3z,-9x+3y+z)$.

Câu 26: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh $f(x,y)=(x,2y,0)$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $\mathscr{B}=\{(1,1),(1,-1)\}$ của $\mathbb{R}^2$ và $\mathscr{B}'=\{(0,1,1),(1,0,1),((1,1,0)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

a) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & -3\\ -1 & 1\\ 3 & -4\end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix}3 & -3\\ -1 & 1\\ 3 & -4\end{bmatrix}$.

c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

d) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -4 & 3\\ 3 & -5\end{bmatrix}$.

Câu 27: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ có công thức xác định ảnh $f(x,y,z)=(x+y+z,x+y-z)$. Tìm ma trận A của f trong cơ sở $\mathscr{B}_1=\{(0,1,1),(1,0,1),((1,1,0)\}$, $\mathscr{B}'_1=\{(1,1),(0,1)\}$ và ma trận B của f trong cơ sở $\mathscr{B}_2=\{(1,0,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$, $\mathscr{B}'_2=\{(1,1),(1,-1)\}$.

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 28: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. **Tìm đa thức đặc trưng** $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

a) $P(\lambda)=(8-\lambda)(1+\lambda)^2$.

b) $P(\lambda)=-(8-\lambda)^2(1+\lambda)$.

c) $P(\lambda)=(8+\lambda)^2(1-\lambda)$.

d) $P(\lambda)=(6-\lambda)(1-\lambda)^2$.

Câu 29: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **có công thức xác định ảnh** $f(x,y,z)=(x-3y+4z,4x-7y+8z,6x-7y+7z)$. **Tìm đa thức đặc trưng** $P(\lambda)=\det(f-\lambda Id_{\mathbb{R}^3})$.

a) $P(\lambda)=(8-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda)$.

b) $P(\lambda)=-(3-\lambda)^2(1+\lambda)$.

c) $P(\lambda)=(3-\lambda)(1+\lambda)^2$.

d) $P(\lambda)=(6-\lambda)(1-\lambda)^2$.

Câu 30: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **có công thức xác định ảnh** $f(x,y,z)=(x-3y+4z,4x-7y+8z,6x-7y+7z)$. **Tìm một cơ sở của không gian riêng ứng với giá trị riêng** $\lambda=-1$.

a) $\{(1,2,1)\}$.

b) $\{(1,2,1),(2,-1,3)\}$.

c) $\{(2,-1,3),(1,1,0)\}$.

d) $\{(2,-1,3),(0,-1,1)\}$.

Câu 31: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$**.**

Tìm đa thức đặc trưng $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

a) $P(\lambda)=(4-\lambda)(1+\lambda)^2$.

b) $P(\lambda)=(4-\lambda)^2(2-\lambda)$.

c) $P(\lambda)=-\lambda(2-\lambda)^2$.

d) $P(\lambda)=(6-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

Câu 32: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$**. Tìm một cơ sở của không gian riêng ứng với giá trị riêng** $\lambda=2$**.**

a) $\{(2,-1,3)\}$.

b) $\{(1,0,1)\}$.

c) $\{(2,-1,3),(1,1,0)\}$.

d) $\{(2,-1,3),(0,-1,1)\}$.

Câu 33: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$**. Tìm ma trận** P **sao cho** $P^{-1}AP$ **có dạng chéo.**

a) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

b) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

c) $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

d) $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Câu 34: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{bmatrix}$**. Tìm ma trận** P **sao cho** $P^{-1}AP$ **có dạng chéo.**

a) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

b) $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

c) $P=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

d) $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Câu 35: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}$**. Tìm ma trận** P **sao cho** $P^{-1}AP$ **có dạng chéo.**

a) $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 5\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

b) $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

c) $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

d) Không tồn tại ma trận P.

Câu 36: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\boldsymbol{P}_2\to\boldsymbol{P}_2$ **có công thức xác định ảnh**

$f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=(a_0-3a_1+a_2)+(3a_0-5a_1+a_2)x+(3a_0-3a_1+a_2)x^2$**. Tìm đa thức đặc trưng** $P(\lambda)=\det\left(f-\lambda Id_{\boldsymbol{P}_2}\right)$**.**

a) $P(\lambda)=(8-\lambda)(1+\lambda)(3-\lambda)$.

b) $P(\lambda)=-(3-\lambda)^2(1+\lambda)$.

c) $P(\lambda)=(1-\lambda)(2+\lambda)^2$.

d) $P(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$.

Câu 37: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **có công thức xác định ảnh** $f(x,y,z)=(x+2y+2z,x+2y-z,-x+y+4z)$**. Tìm một cơ sở của** $\mathbb{R}^3$ **gồm các véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính** f**:**

a) $v_1=(2,-1,2),v_2=(1,1,1),v_3=(1,0,1)$;

$f(v_1)=v_1,f(v_2)=3v_2,f(v_3)=3v_3$.

b) $v_1 = (2,-1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,1)$;

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = 3v_2, f(v_3) = 3v_3 .$$

c) $v_1 = (-2,1,-1), v_2 = (2,1,1), v_3 = (1,0,1)$;

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = -3v_2, f(v_3) = -3v_3 .$$

d) $v_1 = (2,-1,3), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (1,0,1)$;

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = v_2, f(v_3) = 3v_3 .$$

Câu 38: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh $f(x,y,z) = (3x + y + z, 2x + 4y + 2z, x + y + 3z)$. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở này có dạng chéo:

a) $\{(1,2,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, ma trận của f $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,1,-1)\}$, ma trận của f $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

c) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(1,1,-2)\}$, ma trận của f $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

d) Cả ba trường hợp trên đều đúng.

Câu 39: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có công thức xác định ảnh $f(x,y,z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm các véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f:

a) $v_1 = (1,0,-1), v_2 = (-2,2,1), v_3 = (1,-2,-1)$

$$f(v_1) = v_1,\ f(v_2) = 2v_2,\ f(v_3) = 3v_3 .$$

b) $v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,-,1)$

$$f(v_1)=6v_1\,,\ f(v_2)=2v_2\,,\ f(v_3)=2v_3\ .$$

c) Không tồn tại cơ sở gồm các véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f.

d) $v_1=(1,1,2), v_2=(1,0,0), v_3=(0,1,-1)$

$$f(v_1)=4v_1\,,\ f(v_2)=v_2\,,\ f(v_3)=v_3\ .$$

Câu 40: Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2\to P_2$ có công thức xác định ảnh

$$f\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=(a_0+a_1+a_2)+(2a_1+a_2)x+(2a_1+3a_2)x^2.$$

Tìm một cơ sở $\mathscr{B}$ của P_2 gồm các véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f:

a) $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$; $v_1=1+x+2x^2$, $v_2=1$, $v_3=x-x^2$.

$$f(v_1)=4v_1\,,\ f(v_2)=v_2\,,\ f(v_3)=v_3\ .$$

b) $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$; $v_1=1-x+x^2$, $v_2=1+x+2x^2$, $v_3=x-x^2$.

$$f(v_1)=v_1\,,\ f(v_2)=4v_2\,,\ f(v_3)=v_3\ .$$

c) $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$; $v_1=x-x^2$, $v_2=1+x-x^2$, $v_3=2+2x+4x^2$.

$$f(v_1)=v_1\,,\ f(v_2)=v_2\,,\ f(v_3)=4v_3\ .$$

d) Cả ba trường hợp trên đều đúng.

CHƯƠNG 7: KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE DẠNG TOÀN PHƯƠNG

7.1 MỤC TIÊU, YÊU CẦU, Ý NGHĨA

Euclide là người đầu tiên đã trình bày toán học một cách hệ thống trong bộ sách "Cơ sở", trong đó Euclide đã xây dựng môn hình học chỉ dựa trên năm tiên đề. Cuốn sách này được dùng làm sách giáo khoa cho đến tận thế kỷ 19. Không gian Euclide ban đầu được hiểu như là không gian thực 3 chiều với hệ tiên đề Euclide. Sự mở rộng sang không gian nhiều chiều xuất phát từ những công trình của Banach (1892-1945), nhà toán học Ba Lan.

Không gian afin được xây dựng trên cơ sở không gian véc tơ, trong đó ta chỉ khảo sát các phẳng và quan hệ song song. Không gian Euclide được xây dựng trên cơ sở không gian véc tơ Euclide, trong đó ta có thể tính được độ dài, quan hệ trực giao, khái niệm góc.... Mặt phẳng và không gian ta gặp trong chương trình phổ thông là các không gian Euclide.

Không gian véc tơ Euclide là một không gian véc tơ với tích vô hướng. Tích vô hướng là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương. Khái niệm tích vô hướng được khái quát hoá từ khái niệm tích vô hướng đã gặp ở phổ thông, trong đó tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ là số thực $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Hai véc tơ được gọi là trực giao nhau nếu tích vô hướng của chúng bằng 0. Hệ véc tơ gồm các véc tơ trực giao nhau được gọi là một hệ trực giao. Véc tơ có tích vô hướng với chính nó bằng 1 được gọi là véc tơ đơn vị. Một hệ trực giao gồm các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn. Cho một hệ véc tơ độc lập tuyến tính thì ta có thể tìm được một hệ trực chuẩn sao cho không gian sinh bởi hai hệ này là trùng nhau. Để tìm hệ trực chuẩn này ta sử dụng lược đồ trực chuẩn hoá Gram-Shmidt.

Trong viễn thông người ta hay dùng phương pháp này trong lý thuyết truyền dẫn tín hiệu, trong đó mỗi tín hiệu được biểu diễn dưới dạng một hàm số theo thời gian t. Tích vô hướng của hai tín hiệu $f(t), g(t)$ là $\langle f(t),g(t)\rangle=\int_a^b f(t)g(t)dt$. Lúc đó người ta tìm một hệ các tín hiệu chuẩn là một hệ trực chuẩn (bằng cách trực chuẩn hoá Gram-Shmidt), còn các tín hiệu khác được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu chuẩn này.

Ma trận trực giao là ma trận vuông có các véc tơ cột là một hệ trực chuẩn. Ma trận chuyển cơ sở của hai cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao. Ma trận của ánh xạ trực giao trong cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao. Ma trận trực giao khả nghịch và ma trận nghịch đảo bằng ma trận chuyển vị của nó.

Bài toán chéo hoá trực giao ma trận vuông A là tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t AT$ là ma trận chéo. Ma trận vuông chéo hoá trực giao được khi và chỉ khi nó là ma trận đối xứng. Để chứng minh điều này ta sử dụng tự đồng cấu đối xứng.

Khái niệm dạng toàn phương có rất nhiều ứng dụng.

Một dạng toàn phương được xác định bởi duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng được gọi là dạng cực của dạng toàn phương đó. Ma trận của dạng cực cũng còn gọi là ma trận của dạng toàn phương. Vậy ma trận của một dạng toàn phương là ma trận đối xứng, do đó có thể chéo hoá trực giao được. Bằng phương pháp này ta có thể đưa biểu thức toạ độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc (chỉ chứa các thành phần bình phương, ma trận của nó có dạng chéo). Ngoài ra ta có thể đưa về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange và phương pháp Jacobi, thuật biến đổi ma trận.... Khi đưa biểu thức toạ độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng những phương pháp khác nhau thì các hệ số trên đường chéo của ma trận chéo có thể khác nhau, nhưng số các hệ số dương và hệ số âm luôn bằng nhau, được gọi là chỉ số quán tính của dạng toàn phương. Định lý Sylvester cho ta một tiêu chuẩn để nhận biết một dạng toàn phương là xác định dương hay xác định âm dựa vào các định thức con chính góc bên trái.

Dựa vào tính bất biến của chỉ số quán tính của dạng toàn phương ta có thể ứng dụng để phân loại các đường bậc 2 trong mặt phẳng (các đường cô níc: đường êlíp, hyperbol, parabol. Đây là 3 đường cong cơ bản đã được khảo sát ở phổ thông dưới dạng phương trình chính tắc) và các mặt bậc 2 trong không gian. Thực hiện phép đổi trục toạ độ để đưa đường bậc 2 trong mặt phẳng và mặt bậc 2 trong không gian về dạng chính tắc.

Hàm số chỉ đạt cực trị tại những điểm tới hạn (đạo hàm bậc nhất bằng 0 hoặc không tồn tại đạo hàm). Khi hàm một biến số có đạo hàm bậc 1 triệt tiêu tại một điểm nào đó thì số gia của hàm phụ thuộc vào dấu của đạo hàm bậc 2 tại điểm này. Khi hàm nhiều biến có các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0 tại điểm tới hạn tại một điểm nào đó thì số gia của hàm tại điểm này phụ thuộc vào vi phân bậc 2, đó là một dạng toàn phương. Tuỳ theo tính chất xác định dương, xác định âm hay không xác định của dạng toàn phương này ta có thể kết luận hàm số đạt cực tiểu, cực đại hay không đạt cực trị tại điểm đã xét. Khi vi phân bậc 2 bằng 0 thì bài toán sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng rất may là trường hợp này ít gặp trong thực tế.

Dạng toàn phương còn được sử dụng trong bài toán bình phương cực tiểu, trong quy hoạch động, phân loại các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 ...

Học viên nên áp dụng thành thạo lược đồ trực chuẩn hóa Gram-Shmidt. Đổi cơ sở để đưa biểu thức toạ độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc, đặc biệt chú trọng phương pháp chéo hóa trực giao.

7.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

7.2.1 Dạng song tuyến tính

Một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \eta : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \eta(u,v) \end{aligned}$$

sao cho khi cố định mỗi biến thì nó trở thành ánh xạ tuyến tính đối với biến kia.

Dạng song tuyến tính η được gọi là có tính:

i) Đối xứng: Nếu $\eta(u,v) = \eta(v,u)$ với mọi $u,v \in V$;

ii) Không âm: Nếu $\eta(u,u) \geq 0$ với mọi $u \in V$;

iii) Không dương: Nếu $\eta(u,u) \leq 0$ với mọi $u \in V$;

iv) Xác định: Nếu $\eta(u,u) = 0$ khi và chỉ khi $u = 0$.

Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng. Ta thường ký hiệu tích vô hướng của u và v là $\langle u,v \rangle$ thay cho $\eta(u,v)$.

7.2.2 Không gian Euclide

Một không gian véc tơ V với một tích vô hướng <,> được gọi là không gian véc tơ Euclide.

7.2.3 Chuẩn của véc tơ

Với mỗi véc tơ $v \in V$ ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay mô đun của véc tơ v qua biểu thức: $\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$.

Nếu $\|v\| = 1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

7.2.4 Trực giao, trực chuẩn

Hai véc tơ $u, v \in V$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $u \perp v$, nếu $\langle u, v\rangle = 0$.

Hệ các véc tơ $S = \{v_1,..., v_n\}$ của V được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau.

Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

7.2.5 Trực chuẩn hoá Gram-Shmidt

Giả sử $S = \{u_1,..., u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của không gian Euclide V. Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S' = \{v_1,..., v_n\}$ sao cho

$\text{span}\{v_1,..., v_k\} = \text{span}\{u_1,..., u_k\}; k = 1,..., n$.

- ✓ $k = 1$: Vì hệ S độc lập nên $u_1 \neq 0$. Đặt $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.
- ✓ $k = 2$: Xét $\overline{v_2} = -\langle u_2, v_1\rangle v_1 + u_2$, ta có $\overline{v_2} \neq 0$. Đặt $v_2 = \dfrac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, hệ $\{v_1, v_2\}$ trực chuẩn và $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{u_1, u_2\}$.
- ✓ Giả sử đã xây dựng được đến $k-1$. Tức có $\{v_1,..., v_{k-1}\}$ trực chuẩn sao cho $\text{span}\{v_1,..., v_{k-1}\} = \text{span}\{u_1,..., u_{k-1}\}$.

Tương tự trên ta xét $\overline{v_k} = -\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, v_i\rangle v_i + u_k$ ta cũng có $\overline{v_k} \neq 0$

Đặt $v_k = \dfrac{\overline{v_k}}{\|\overline{v_k}\|}$ thì $v_k \perp v_i$; $i = 1,..., k-1$. Vậy hệ $\{v_1,..., v_k\}$ trực chuẩn và

$\text{span}\{v_1,..., v_k\} = \text{span}\{v_1,..., v_{k-1}, \overline{v_k}\} = \text{span}\{u_1,..., u_{k-1}, u_k\}$.

7.2.6 Cơ sở trực chuẩn

Một cơ sở của không gian véc tơ V mà là hệ trực chuẩn được gọi là một cơ sở trực chuẩn.

Mọi hệ trực chuẩn của V đều có thể bổ sung thêm để trở thành cơ sở trực chuẩn.

Giả sử $\{e_1,..., e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V thì với mọi $u, v \in V$, ta có

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

$$\langle u, v \rangle = \langle u, e_1 \rangle \langle v, e_1 \rangle + \ldots + \langle u, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle$$

$$\|v\|^2 = \langle v, e_1 \rangle^2 + \ldots + \langle v, e_n \rangle^2$$

7.2.7 Không gian con trực giao, phần bù trực giao

Véc tơ $v \in V$ được gọi là trực giao với tập con $S \subset V$, ký hiệu $v \perp S$, nếu $v \perp u$ với mọi $u \in S$.

Tập con S_1 trực giao với tập con S_2, ký hiệu $S_1 \perp S_2$, nếu $v \perp u$ với mọi $v \in S_1, u \in S_2$.

Nếu $v \perp S$ thì $v \perp \text{span}S$.

Giả sử $\{e_1, ..., e_k\}$ là một cơ sở của W thì $v \perp W$ khi và chỉ khi $v \perp e_i$, với mọi $i = 1, ..., k$.

Với mọi tập con $S \subset V$. Ta ký hiệu $S^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp u, \forall u \in S\}$.

Tập $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V.

Với mọi không gian con W của V. Ta có $V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}$, $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

Hai không gian con $W, W^{\perp}$ được gọi là phần bù trực giao của nhau.

7.2.8 Ma trận trực giao

Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu $A^t A = I$.

Như vậy ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^t$.

Ma trận A trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột và các véc tơ hàng của A tạo thành hai hệ trực chuẩn.

Ta có $\left|A^t A\right| = |I| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$.

Mọi ma trận vuông cấp 2 trực giao đều có dạng

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Ma trận của một hệ trực chuẩn viết trong cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Đặc biệt mọi ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

7.2.9 Ánh xạ tuyến tính trực giao

Giả sử $\left(V,\langle\ ,\ \rangle_V\right)$ và $\left(V',\langle\ ,\ \rangle_{V'}\right)$ là hai không gian véc tơ Euclide. ánh xạ tuyến tính $f:V\to V'$ được gọi là ánh xạ trực giao nếu với mọi $u,v\in V$:

$$\langle f(u),f(v)\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V$$

Tự đẳng cấu f là trực giao khi và chỉ khi ma trận của tự đẳng cấu f trong một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao.

7.2.10 Bài toán chéo hoá trực giao

Cho ma trận A tìm ma trận trực giao T sao cho T^tAT là ma trận chéo.

A chéo hoá trực giao được khi và chỉ khi A là ma trận đối xứng.

7.2.11 Thuật toán chéo hoá trực giao

Muốn chéo hoá trực giao một ma trận đối xứng A, nghĩa là tìm ma trận trực giao T sao cho T^tAT có dạng chéo, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm các giá trị riêng của ma trân đối xứng A (nghiệm của đa thức đặc trưng).

Bước 2: Trong mỗi không gian riêng tìm một cơ sở và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này.

Bước 3: Gộp các cơ sở đã được trực chuẩn hoá ở bước 2 ta có một cơ sở trực chuẩn của V. Ma trận các véc tơ của cơ sở này là ma trận trực giao T cần tìm.

7.2.12 Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

Giả sử $\eta:V\times V\to\mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V

Ma trận $$A=\left[a_{ij}\right]\ ,\quad a_{ij}=\eta(e_i,e_j)$$

được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính η trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$\forall u,\ v\in V;\ u=x_1e_1+...+x_ne_n$ và $v=y_1e_1+...+y_ne_n$

$$\eta(u,v)=\eta(x_1e_1+...+x_ne_n,y_1e_1+...+y_ne_n)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\eta(e_i,e_j)x_iy_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

được gọi là biểu thức toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Ngược lại ánh xạ $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\eta(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ là một dạng song tuyến tính có ma trận $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$.

Giả sử $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V.

Ánh xạ
$$\begin{aligned} Q : V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto Q(v) = \eta(v,v) \end{aligned}$$

được gọi là một dạng toàn phương trên V. Do đó

$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, với $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ là biểu thức toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Một dạng toàn phương $Q : V \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trong không gian véc tơ V có công thức xác định ảnh $Q(v)$ là một đa thức thuần nhất bậc hai đối với các toạ độ của véc tơ v trong cơ sở bất kỳ.

Mỗi dạng toàn phương Q chỉ có duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng η, được gọi là dạng cực của Q, sao cho $Q(v) = \eta(v,v)$.

Nếu A là ma trận của dạng cực η của Q thì A cũng còn được gọi là ma trận của dạng toàn phương Q.

7.2.13 Biểu thức toạ độ của dạng toàn phương trong các cơ sở khác nhau

Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian véc tơ V. $A = [a_{ij}]$, $A' = [a'_{ij}]$ là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$. $\mathscr{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ của V . Gọi $T = [t_{ij}]$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì $A' = T^t A T$.

7.2.14 Biểu thức toạ độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương

Ta cần tìm một cơ sở của V để trong cơ sở này ma trận của dạng toàn phương là ma trận chéo, nghĩa là biểu thức toạ độ có dạng chính tắc:

$Q(v) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + ... + a_{nn} x_n^2$

Đưa về chính tắc bằng chéo hoá trực giao:

Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ có ma trận $A=\left[a_{ij}\right]$ (ma trận đối xứng). Chéo hoá trực giao ma trận $A=\left[a_{ij}\right]$, nghĩa là ta tìm được ma trận trực giao T để $T^t AT$ là ma trận chéo. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}'$ gồm các véc tơ riêng của A. Vì vậy biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc.

Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange:

Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ của không gian véc tơ V (không giả thiết không gian Euclide) biểu thức toạ độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$Q(v)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,,\quad a_{ij}=a_{ji}\quad, v=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,.$$

Ta thực hiện các phép đổi toạ độ sau:

♦ Trường hợp 1: Giả sử có $a_{ii}\neq 0$, chẳng hạn $a_{11}\neq 0$ thì ta có thể sắp xếp lại:

$$Q(v)=a_{11}\left(x_1{}^2+2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)+\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$=a_{11}\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\,x_i x_j$$

Đặt $\begin{cases} y_1=x_1+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i \\ y_j=x_j\ ;\quad j=2,...,n\end{cases}$ thì $Q(v)=a_{11}y_1{}^2+\displaystyle\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\,y_i y_j$

Tiếp tục quá trình này với biểu thức $\displaystyle\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\,y_i y_j$.

♦ Trường hợp 2: Nếu mọi $a_{ii}=0$ thì tồn tại $a_{ij}\neq 0$, chẳng hạn $a_{12}\neq 0$.

Đặt $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_j=y_j\ ;\ j=3,...,n\end{cases}$ thì $Q(v)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\,y_i y_j$

có $a'_{11} = a_{12} \neq 0$, vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi:

Cho dạng toàn phương Q trong không gian véc tơ V (không giả thiết không gian Euclide) với dạng cực tương ứng η và có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là $A = [a_{ij}]$: $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$; $i, j = 1,...,n$.

Nếu các định thức con chính của A đều khác không:

$$D_1 = a_{11} \neq 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, ...,\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì với mỗi $j = 1,...,n$ các hệ phương trình Cramer sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j = 0 \\ .... \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jj}x_j = 1 \end{cases}$$

luôn có nghiệm duy nhất ký hiệu là $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{jj})$.

Xét hệ véc tơ
$$\begin{cases} f_1 = \alpha_{11}e_1 \\ f_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\ .... \\ f_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n \end{cases}$$

thì biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{f_1,..., f_n\}$ có dạng chính tắc:

$$v = y_1 f_1 + ... + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1} y_1{}^2 + \frac{D_1}{D_2} y_2{}^2 + ... + \frac{D_{n-1}}{D_n} y_n{}^2.$$

7.2.15 Luật quán tính

Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương Q là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở). Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương và số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm.

Giả sử (p, q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương Q trong không gian n chiều V thì $p + q = r$ (hạng của Q).

Nếu $r = n$ thì Q được gọi là không suy biến;

$p = n$ thì Q được gọi là xác định dương;

$q = n$ thì Q được gọi là xác định âm.

Định lý Sylvester: Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó:

(i) Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con góc trái của A luôn dương.

(ii) Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con góc trái cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

7.3 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Câu 1: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$**, biểu thức nào sau đây của** η **xác định một dạng song tuyến tính của không gian véc tơ** $\mathbb{R}^2$**.**

a) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$.

b) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

c) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 13x_1y_2 - 5y_1y_2$.

d) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1 + x_2 - 3x_1y_2 + 5y_1y_2$.

Câu 2: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$**, dạng song tuyến tính** η **nào sau đây của không gian véc tơ** $\mathbb{R}^2$ **có tính xác định.**

a) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 13x_1y_2 - 5y_1y_2$.

b) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 - 6x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4y_1y_2$.

c) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 5x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10y_1y_2$.

d) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + 8x_2y_1 + 5y_1y_2$.

Câu 3: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$**, dạng song tuyến tính** η **nào sau đây của không gian véc tơ** $\mathbb{R}^2$ **có tính đối xứng.**

a) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + 6y_1y_2$.

b) $\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2$.

c) $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 - 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 2y_1y_2$.

d) $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1 - 3y_1y_2$.

Câu 4: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$**, dạng song tuyến tính** η **nào sau đây của không gian véc tơ** $\mathbb{R}^2$ **là một tích vô hướng.**

a) $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 + 8x_1y_2 - y_1y_2$.

b) $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 3x_1x_2 + 5x_1y_2 + 2x_2y_1 + y_1y_2$.

c) $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 - 3x_2y_1 + y_1y_2$.

d) $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2$.

Câu 5: Giả sử $\langle , \rangle$ **là một tích vô hướng của không gian véc tơ** V**. Điều nào sau đây không đúng.**

a) Nếu $\langle u,v \rangle = 0$ với mọi $v \in V$ thì $u = 0$.

b) $\langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle$.

c) $\langle u,u \rangle > 0$ với mọi $u \in V$ và $u \neq 0$.

d) $\forall u,v \in V, \forall k \in \mathbb{R}; \langle ku,kv \rangle = k^2 \langle u,v \rangle$.

Câu 6: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$**,** $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$ **xác định một tích vô hướng của không gian véc tơ** $\mathbb{R}^2$**. Tìm mô đun** $\|v\|$**,** $v = (3,4)$**.**

a) $\|v\| = \sqrt{33}$.

b) $\|v\| = 5$.

c) $\|v\| = \sqrt{12}$.

d) $\|v\| = 1$.

Câu 7: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ **xét tích vô hướng thông thường. Tìm véc tơ** u **trực chuẩn hoá của véc tơ** $v = \left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)$**.**

a) $u = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b) $u=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\sqrt{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

c) $u=\left(-\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}}\right)$.

d) $u=\left(-\frac{2}{\sqrt{30}},\sqrt{30},\frac{1}{\sqrt{30}}\right)$.

Câu 8: Ký hiệu $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ là mô đun của véc tơ v trong không gian véc tơ Euclide V. Điều nào sau đây không đúng.

a) $\|v\|\ge 0$; và $\|v\|=0$ khi và chỉ khi $v=0$.

b) $\|kv\|=|k|\,\|v\|$.

c) $\|v+u\|\le\|v\|+\|u\|$.

d) $\|v-u\|\le\|v\|-\|u\|$.

Câu 9: Cho không gian véc tơ Euclide V với tích vô hướng $\langle\,,\rangle$. Điều nào sau đây không đúng.

a) $\|u\|=\|v\|$ khi và chỉ khi $\langle u+v,u-v\rangle=0$.

b) $\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\|u+v\|^2-\frac{1}{2}\|u-v\|^2$.

c) $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ khi và chỉ khi $u\perp v$.

d) $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

Câu 10: Ta gọi $d(u,v)=\|u-v\|$ là hàm khoảng cách trong không gian véc tơ Euclide V. Điều nào sau đây không đúng.

a) $d(u,v)\ge 0$; và $d(u,v)=0$ khi và chỉ khi $u=v$.

b) $d(ku,kv)=k^2d(u,v)$.

c) $d(u,v)\le d(u,w)+d(w,v)$.

d) $d(u,v)=d(v,u)$.

Câu 11: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng thông thường. Tìm một véc tơ đơn vị w trực giao với hai véc tơ $u_1=(1,2,3)$, $u_2=(0,1,3)$.

a) $w=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

b) $w=\left(0,\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

c) $w=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

d) $w=(-1,3-1)$.

Câu 12: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$ xét tích vô hướng thông thường. Trực chuẩn hoá Gram-Shmidt của hệ véc tơ $u_1=(1,-2), u_2=(2,0)$.

a) $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right), v_2=(1,0)$.

b) $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right), v_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

c) $v_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right), v_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)$.

d) $v_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right), v_2=(2,1)$.

Câu 13: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng thông thường. Trực chuẩn hoá Gram-Shmidt của hệ véc tơ $u_1=(1,1,1), u_2=(0,1,1), u_3=(0,0,1)$.

a) $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), v_3=(0,0,1)$.

b) $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right), v_3=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c) $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right), v_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right), v_3=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 14:

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in \mathbb{R}^2, \quad \eta((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$$

xác định một tích vô hướng của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$. Trực chuẩn hoá Gram-Schmidt cơ sở $\{e_1 = (1,0),\, e_2 = (0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

a) $v_1 = e_1 = (1,0),\, v_2 = e_2 = (0,1)$.

b) $v_1 = e_1 = (1,0),\, v_2 = (2,1)$.

c) $v_1 = (1,2),\, v_2 = e_2 = (0,1)$.

d) $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\, v_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Câu 15: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ xét tích vô hướng thông thường. Tìm một cơ sở của không gian W gồm các véc tơ trực giao với hai véc tơ $u_1 = (1,-2,3,4),\, u_2 = (3,-5,7,8)$.

a) $v_1 = (3,1,0,-4),\; v_2 = (1,-3,5,4)$.

b) $v_1 = (4,1,0,6),\; v_2 = (2,-1,3,0),\; v_3 = (1,-1,3,2)$.

c) $v_1 = (1,2,1,0),\, v_2 = (4,4,0,1)$.

d) $v_1 = (2,4,2,0),\; v_2 = (5,6,1,2)$.

Câu 16: Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^5$ xét tích vô hướng thông thường. Tìm một cơ sở của phần bù trực giao $W^{\perp}$ của không gian

$$W = \operatorname{span}\{u_1 = (1,2,3,-1,2),\, u_2 = (2,4,7,2,-1)\}.$$

a) $\{v_1 = (2,-1,0,0,0),\, v_2 = (-17,0,5,0,1),\, v_3 = (13,0,-4,1,0)\}$.

b) $\{v_1 = (2,-1,0,0,0),\, v_2 = (-17,0,5,0,1)\}$.

c) $\{v_1 = (2,-1,0,0,0),\, v_2 = (7,0,5,0,1),\, v_3 = (13,0,-4,1,0)\}$.

d) $\{v_1 = (2,-1,0,0,0),\, v_2 = (-17,0,5,0,1),\, v_3 = (15,1,-5,0,-1)\}$.

Câu 17: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian véc tơ con của không gian véc tơ Euclide V. Điều nào sau đây không đúng.

a) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

b) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

c) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cup W_2^{\perp}$.

d) $W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$.

Câu 18: Xác định xem cơ sở nào sau đây là cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(1,-1,1),(0,1,1),(2,0,1)\}$.

b) $\{(1,2,2),(2,0,1),(-1,0,1)\}$.

c) $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$.

d) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Câu 19: Ma trận nào sau đây không phải là ma trận trực giao

a) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 20: Cho ma trận trực giao A. Điều nào sau đây không đúng

a) Hệ các véc tơ cột của A là một hệ trực chuẩn.

b) Hệ các véc tơ hàng của A là một hệ trực chuẩn.

c) Định thức của A luôn bằng 1.

d) Tồn tại ma trận nghịch đảo $A^{-1} = A^t$.

Câu 21: Điều nào sau đây không đúng.

a) Ma trận của một hệ trực chuẩn trong cơ sở bất kỳ là một ma trận trực giao.

b) Nếu A là ma trận trực giao thì A^t cũng là ma trận trực giao.

c) Ma trận trực giao chỉ nhận các giá trị riêng là 1 hoặc -1.

d) Nếu A, B là hai ma trận trực giao thì AB cũng là ma trận trực giao.

Câu 22: Tìm x, y, z **sao cho ma trận** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ x & y & z \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **là ma trận trực giao và** $\det A = 1$**.**

a) $x = \frac{2}{3}, y = \frac{-1}{3}, z = \frac{1}{3}$.

b) $x = \frac{4}{3\sqrt{2}}, y = \frac{-1}{3\sqrt{2}}, z = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$.

c) $x = \frac{-4}{3\sqrt{2}}, y = \frac{1}{3\sqrt{2}}, z = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

d) $x = -4\sqrt{2}, y = \sqrt{2}, z = \sqrt{2}$.

Câu 23: Điều nào sau đây không đúng

a) Tự đồng cấu f là tự đồng cấu trực giao khi và chỉ khi ma trận của f một trong cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

b) Tự đồng cấu f là tự đồng cấu đối xứng khi và chỉ khi ma trận của f một trong cơ sở trực chuẩn là ma trận đối xứng.

c) Mọi ma trận đối xứng đều chéo hoá trực giao được.

d) Ma trận đối xứng chỉ nhận các giá trị riêng khác 0.

Câu 24: Cho $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$**. Tìm ma trận trực giao** P **sao cho** $P^t AP$ **có dạng chéo.**

a) $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$.

b) $P=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

c) $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

d) $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$.

Câu 25: Cho $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$**. Tìm ma trận trực giao** P **sao cho** $P^t AP$ **có dạng chéo.**

a) $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$.

b) $P=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

c) $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

d) $P=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Câu 26: Viết ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc:

$Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 27: Cho dạng toàn phương $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$Q(x,y)=2x^2-6xy+y^2$. **Tìm ma trận của Q trong cơ sở** $\{v_1=(1,0),\ v_2=(1,1)\}$

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 28: Cho dạng toàn phương $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$Q(x,y,z) = xy + xz + yz$**. Tìm chỉ số quán tính dương p và chỉ số quán tính âm q.**

a) $p=1, q=2$.

b) $p=2, q=1$.

c) $p=1, q=1$.

d) $p=0, q=2$.

Câu 29: Cho dạng toàn phương $Q:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$Q(x,y,z,t) = 3x^2 + 2y^2 - z^2 - 2t^2 + 2xy - 4yz + 2yt$**. Tìm chỉ số quán tính dương p và chỉ số quán tính âm q.**

a) $p=1, q=3$.

b) $p=3, q=1$.

c) $p=2, q=2$.

d) $p=1, q=2$.

Câu 30: Cho dạng toàn phương $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$. Tìm một cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc. $(x,y,z) = Xv_1 + Yv_2 + Zv_3$; $Q(x,y,z) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$

a) $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$;

$\alpha = -5, \beta = 1, \gamma = 1$.

b) $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$;

$\alpha = 5, \beta = -1, \gamma = -1$.

c) $v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

$\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = -1$.

d) $v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

$\alpha = 5, \beta = 5, \gamma = -1$.

Câu 31: Cho dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $A = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$. Tìm một cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở này có dạng chính tắc. $(x, y, z) = Xv_1 + Yv_2 + Zv_3$; $Q(x, y, z) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$.

a) $v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_3 = \left(\frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$;

$\alpha = 9, \beta = 18, \gamma = 18$.

b) $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$;

$\alpha = 5, \beta = 10, \gamma = 10$.

c) $v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

$\alpha = 3, \beta = 5, \gamma = -1$.

d) $v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$, $v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2$.

Câu 32: Với giá trị nào của tham số m thì dạng toàn phương $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2mxy + 2xz$ xác định dương.

a) $m = 1$.

b) $|m| < \sqrt{5/3}$.

c) $m \neq 0$.

d) $m > 0$.

Câu 33: Cho dạng toàn phương $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở chính tắc $A=\begin{bmatrix}1 & m & -1\\ m & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$. Với giá trị nào của tham số m thì dạng toàn phương Q, xác định dương.

a) $m>1$.

b) $m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $m\neq 0$.

d) $\dfrac{-4}{5}<m<0$.

Câu 34: Với giá trị nào của tham số m thì dạng toàn phương $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x,y,z)=-4x^2-y^2+4mz^2+2mxy-4mxz+4yz$ xác định âm.

a) $m>-1$.

b) $|m|<2$.

c) $-2<m<-1$.

d) $m\geq -2$.

Câu 35: Tìm k để dạng song tuyến tính xác định như sau

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\quad \eta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=x_1x_2-3x_1y_2-3x_2y_1+ky_1y_2$$

là một tích vô hướng của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

a) $k>9$.

b) $k>0$.

c) $0<k<9$.

d) $k\neq 0$.

Câu 36: Tìm điều kiện a,b,c,d để dạng song tuyến tính xác định như sau

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\quad \eta\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=ax_1x_2+bx_1y_2+cx_2y_1+dy_1y_2$$

là một tích vô hướng của không gian véc tơ $\mathbb{R}^2$.

a) $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.

b) $a>0,\ d>0,\ ad-bc>0$.

c) $a > 0, b = c, ad - bc > 0$.

d) $a > 0, d > 0, ad - bc < 0$.

Câu 37: Hãy đưa các đường bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng $3x^2 + 8xy - 3y^2 + 180 = 0$**.**

Câu 38: Hãy đưa các đường bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng $4x^2 + 9xy + 12y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$**.**

Câu 39: Hãy đưa các mặt bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$**.**

Câu 40: Hãy đưa các mặt bậc hai có phương trình sau về dạng chính tắc và viết tên chúng $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 12z = 0$**.**

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG 1

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	c	21	a) 120, b) 48, c) 72, d) 250
2	d	22	c
3	b	23	d
4	c	24	d
5	d	25	b
6	d	26	b
7	b	27	a) 210, b) 62, c) 203, d) 70
8	a	28	d
9	d	29	a
10		30	b
11	d	31	c
12		32	a
13	c	33	c
14		34	b
15	d	35	c
16	c	36	a,c,d tương đương
17	b	37	b
18	c	38	b
19	b		
20			

Câu 3, 4, 5, 6, 7: Sử dụng lôgích mệnh đề.

Câu 9: a) Không đối xứng. b), c) Không bắc cầu.

Câu 10: Lớp tương đương của a là $\overline{a} = \{x \in \mathbb{R} \mid (a-x)(a^2+x^2+ax-1)=0\}$

$$\overline{a} = \begin{cases} \{a\} & \text{nếu } |a| > 2/\sqrt{3} \\ \{a, -2a\} & \text{nếu } |a| = 1/\sqrt{3} \\ \left\{a, \left(-a \pm \sqrt{4-3a^2}\right)/2\right\} & \text{nếu } |a| < 2/\sqrt{3} \text{ và } |a| \neq 1/\sqrt{3} \\ \{a, -a/2\} & \text{nếu } |a| = 2/\sqrt{3} \end{cases}$$

a) $\{a\}$ b) $\{a, -2a\}$ c) $\left\{a, \left(-a \pm \sqrt{4-3a^2}\right)/2\right\}$ d) $\{a, -a/2\}$

Câu 12:

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le 2\}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x,\ x^2 < 2\}$

Câu 13: Giải phương trình $f(x) = y$.

Câu 14: a) $f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ n-1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$,

b) $g \circ f(n) = g(2n) = n$; với mọi số nguyên n.

c) $f \circ f(n) = 4n$

d) $f \circ g \circ f = f$

Câu 20: a) $\sigma \circ \mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\mu \circ \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\mu^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 15, 16, 17, 18, 19: Sử dụng lôgích mệnh đề, định nghĩa và các tính chất của ánh xạ.

Câu 29: $(37+19)^{31} = \sum_{k=0}^{31} C_{31}^{k} 37^{k} 19^{31-k}$; Đặt $a_k = C_{31}^{k} 37^{k} 19^{31-k}$

Xét $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{C_{31}^{k} 37^{k} 19^{31-k}}{C_{31}^{k+1} 37^{k+1} 19^{31-k-1}} = \dfrac{k+1}{31-k} \cdot \dfrac{19}{37} < 1 \Leftrightarrow k < \dfrac{1128}{56} = 20{,}14$

$\Rightarrow \quad \forall k \le 20$ ta có: $a_k < a_{k+1} \Rightarrow a_k < a_{21}$

$\forall k \ge 21$ ta có: $a_k > a_{k+1} \Rightarrow a_k \le a_{21}$

Vậy $a_{Max} = a_{21} = C_{31}^{21} 37^{21}.19^{10} = C_{31}^{10} 37^{21}.19^{10}$.

Câu 30, 31, 32, 33, 34: Sử dụng trực tiếp định nghĩa phép hợp thành, nhóm, vành và trường.

Câu 35:

a) Nếu $xy = yx$ thì $(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k y^{m-k}$. Giả sử $x^{n_1} = 0,\ y^{n_2} = 0$ thì $(x+y)^{n_1+n_2} = 0$.

b) Nếu $xy = yx$ thì $(xy)^m = x^m y^m$.

Giả sử $x^{n_1} = 0,\ y^{n_2} = 0$ thì $(xy)^{n_1+n_2} = 0$.

d) Nếu $x^n = 0$ thì $(1-x)\left(1 + x + ... + x^{n-1}\right) = 1$.

$$\Rightarrow (1-x)^{-1} = 1 + x + ... + x^{n-1}.$$

Câu 37: Từ $x \vee (x \wedge z') = x$ và $(y' \wedge z) \vee (y \wedge z) = z$

$\Rightarrow$ mạng tương đương đơn giản hơn có dạng $x \vee z$.

Câu 38: Công thức Boole tương ứng của mạng

$$A = (x \wedge y \wedge z) \vee \left(x \wedge \left[(y' \wedge z) \vee (y \wedge z')\right]\right)$$

$$= x \wedge \left[(y \wedge z) \vee (y' \wedge z) \vee (y \wedge z')\right] = x \wedge (y \vee z)$$

$\Rightarrow$ mạng tương đương đơn giản hơn có dạng $x \wedge (y \vee z)$.

CHƯƠNG 2

Câu	**Đáp án**	**Câu**	**Đáp án**
1	d	16	a) 3 ; b) 2 ; c) 3 ; d) 3
2	c	17	c
3	b	18	a
4	c	19	c
5	c	20	c
6		21	b
7	b	22	c
8	a	23	d
9	c	24	a
10	b	25	c
11	c	26	d
12	c	27	
13	b	28	
14	a) 3 ; b) 2 ; c) 1 ; d) 3	29	
15	c	30	

Câu 1, 2, 3, 4, 5: Sử dụng trực tiếp định nghĩa không gian véc tơ và không gian véc tơ con.

Câu 6: a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 7 \\ 3\alpha + 7\beta - 6\gamma = -2 \\ 5\alpha + 8\beta + \gamma = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \alpha = 11;\ \beta = -5;\ \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 11v_1 + (-5)v_2 + 0v_3$.

Giải các hệ phương trình tương tự ta có các kết quả sau

b) $u = 3v_1 + 5v_2 + (-1)v_3$ c) $u = v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

d) $u = v_1 + v_2 + v_3$.

Câu 7: Bài toán tương đương với việc tìm giá trị của λ để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 2\alpha+3\beta+\ \ \gamma=7 \\ 3\alpha+7\beta-6\gamma=-2 \\ 5\alpha+8\beta+\ \ \gamma=\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 12.$

Câu 8: Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp và áp dụng định lý 2.17 suy ra:

a) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$; b) c) d) không phải là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Hoặc hệ phương trình $\begin{cases} 2\alpha+3\beta+\gamma=a \\ \alpha+2\beta-\gamma=b \\ -3\alpha-5\beta+\gamma=c \end{cases}$

luôn có nghiệm với mọi $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ còn hệ phương trình tương ứng với trường hợp b) c) d) không phải luôn có nghiệm với mọi $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Câu 10: a) Hai véc tơ u,v tỷ lệ với nhau nên phụ thuộc tuyến tính;

Bằng hai phương pháp như câu 8) suy ra:

b) độc lập tuyến tính; c) d) phụ thuộc tuyến tính.

Câu 11: Áp dụng định lý 2.17

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1/2-\lambda & -1/2-\lambda \\ -1/2 & \lambda+1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & \lambda+1/2 \end{bmatrix}$$

$$(\text{nếu } \lambda\neq-1/2) \quad \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1/2-\lambda & -1/2-\lambda \\ 0 & \lambda+1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1/2 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi $\lambda=1$ hay $\lambda=-1/2$.

Câu 17: Bằng phương pháp tương tự ví dụ 2.14, thực hiện các phép biến đổi sơ cấp và áp dụng định lý 2.17, nhận xét 2.18 suy ra:

$\dim V_1 = r\{v_1,v_2,v_3\}=2$, $\dim V_2 = r\{u_1,u_2,u_3\}=2$,

$\dim(V_1+V_2)=r\{v_1,v_2,v_3,u_1,u_2,u_3\}=3 \Rightarrow \dim(V_1\cap V_2)=2+2-3=1.$

Câu 18, 19: được giải tương tự.

CHƯƠNG 3

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	b	11	a
2	c	12	a
3	a	13	c
4	d	14	a
5	c	15	b
6	a	16	d
7	b	17	c
8	d	18	c
9	d	19	a
10	b	20	b

Câu 11: Quy nạp theo n.

Câu 12: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4 = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{2003} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4\right)^{500} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Câu 13: Nếu tồn tại A, B sao cho $AB - BA = I$ thì $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$ nhưng $\mathrm{Tr}I = n$ vô lý.

Câu 14: $A^n = \begin{bmatrix} x^n & * \\ 0 & z^n \end{bmatrix}$

$A^n = I \quad \Rightarrow \quad x^n = z^n = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1,\ z = \pm 1$.

♦ $x = z = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad A^n = \begin{bmatrix} 1 & \pm ny \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = 0$.

♦ $x = -z = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y$ tùy ý.

CHƯƠNG 4

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	b	14	c
2	c	15	b
3	a	16	d
4	d	17	b
5	c	18	a
6	c	19	c
7	a	20	b
8	b	21	a
9	d	22	d
10	c	23	c
11	b	24	b
12	a	25	c
13	a		

Câu 9: Khai triển Laplace theo 2 hàng đầu ta được

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -1\end{vmatrix}=790.$$

Câu 10: Áp dụng định thức Vandermond có các phần tử tương ứng $-1,2,4,x$ ta có

$$D=30(x+1)(x-2)(x-4).$$

Câu 11: Khai triển Laplace theo hàng thứ ba và thứ tư ta được

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}(-1)^{3+4+1+2}\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -3\\ -1 & -3 & 5\end{vmatrix}=-115.$$

Câu 14: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & m & 2 \\ 4 & 1 & m \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix} = (m-4)(m+5)(m-1)$.

Vậy A khả nghịch khi $m \neq -5, 4, 1$.

Câu 17: Áp dụng cônh thức 4.19

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ có $\det A = -7$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -23$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -32$, $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2$,

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 15$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 23$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11$,

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$,

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix} -4 & -23 & -32 \\ 2 & 15 & 23 \\ 1 & 11 & 15 \end{bmatrix}^t = -\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -23 & 15 & 11 \\ -32 & 23 & 15 \end{bmatrix}$.

Câu 19: a) $(I-A)(I+A+\dots+A^{m-1}) = I \Rightarrow A^{-1} = I + A + \dots + A^{m-1}$.

b) $(3I-A)A = 3A - A^2 = I \Rightarrow A^{-1} = 3I - A$.

d) $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B = C$.

Câu 22: $\det(A) = (m+3)(m-1)^3$.

Khi $m \neq -3, 1$ hạng $r(A) = 4$.

Khi $m=1$ ma trận $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ suy ra hạng $r(A)=1$.

Khi $m=-3$ ma trận $A=\begin{bmatrix}1&1&1&-3\\1&1&-3&1\\1&-3&1&1\\-3&1&1&1\end{bmatrix}$, định thức

$$\begin{vmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

suy ra hạng $r(A)=3$.

CHƯƠNG 5

1	d	16	b
2	b	17	d
3	a	18	b
4	b	19	a
5	b	20	c
6	c	21	b
7	a	22	d
8	c	23	b
9	b	24	a
10	d	25	c
11	b	26	b
12	d	27	d
13	b	28	a
14	a	29	c
15	c	30	b

Sử dụng phương pháp khử Gauss ta có trhể giải các bài tập từ câu 7- câu 25.

Câu 17: Ta thực hiện các phép biến đổi tương đương lên các hàng của ma trận bổ sung của hệ phương trình

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}2&5&1&3&2\\2&-3&3&m&7\\4&6&3&5&4\\4&14&1&7&4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}2&5&1&3&2\\4&6&3&5&4\\4&14&1&7&4\\2&-3&3&m&7\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}2&5&1&3&2\\0&-4&1&-1&0\\0&8&-2&2&0\\0&-8&2&m-3&5\end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}2&5&1&3&2\\0&-4&1&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&m-1&5\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}2&9&0&4&2\\0&-4&1&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&m-1&5\end{bmatrix}.$$

Hệ tương đương $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \qquad + 4x_4 = 2 \\ \quad - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad\qquad (m-1)x_4 = 5 \end{cases}$

Khi $m = 1$ hệ vô nghiệm.

Khi $m \neq 1$ hệ có nghiệm $x_4 = \dfrac{5}{m-1}$, $x_3 = 4x_2 + \dfrac{5}{m-1}$, $x_1 = 1 - \dfrac{9}{2}x_2 - \dfrac{10}{m-1}$,

x_2 tùy ý.

Câu 24: Véc tơ (a,b,c) thuộc vào không gian con sinh bởi v_1, v_2, v_3 khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x - y + 3z = b \\ 2y - 4z = c \end{cases}$$

Ma trận bổ sung

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \\ 2 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \\ 0 & 3 & -6 & a-2b \end{bmatrix}$$

Vậy véc tơ (a,b,c) thuộc vào không gian con sinh bởi v_1, v_2, v_3 khi và chỉ khi $3c = 2(a-2b)$ hay $2a = 4b + 3c$.

Câu 26: Ma trận hệ số của hệ (I) là $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ có hạng bằng 2.

Do đó $\dim V_1 = 4 - 2 = 2$. Tương tự ta cũng có $\dim V_2 = 4 - 2 = 2$.

Không gian con $V_1 \cap V_2$ là không gian nghiệm của hệ (I) và hệ (II) có ma trận hệ số $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -10 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ có hạng bằng 3. Do đó $\dim(V_1 \cap V_2) = 4 - 3 = 1$.

Suy ra $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

CHƯƠNG 6

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	b	21	d
2	c	22	a
3	a	23	c
4	d	24	b
5	c	25	a
6	b	26	c
7	d	27	b
8	b	28	a
9	a	29	c
10	b	30	a
11	c	31	c
12	b	32	b
13	a	33	d
14	c	34	c
15	b	35	d
16	a	36	c
17	b	37	b
18	d	38	d
19	c	39	c
20	b	40	d

Các câu 1, 2, 3, 4, 5 áp dụng trực tiếp định nghĩa ánh xạ tuyến tính.

Câu 10: Ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 5\end{bmatrix}\quad r(A)=3 \Rightarrow r(f)=3 \;\Rightarrow\; \dim \mathrm{Ker} f=4-r(f)=1.$$

Câu 18: Định thức của ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cở sở chính tắc trong các trường hợp tương ứng

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$, c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 36$,

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Vậy ánh xạ trong trường hợp d) không đẳng cấu.

Câu 20: Đặt

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = e'_1 \\ e_2 = -e'_1 + e'_2 \\ e_3 = -e'_2 + e'_3 \\ e_4 = -e'_3 + e'_4 \end{cases}$$

$$f(e'_1) = f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 = e'_1 + 3(-e'_1 + e'_2) + 2(-e'_2 + e'_3) + (-e'_3 + e'_4)$$
$$= -2e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4.$$

Tương tự ta tính được $f(e'_2) = -4e'_2 + 4e'_3 + 3e'_4$.

$$f(e'_3) = e'_1 - 8e'_2 + 6e'_3 + 4e'_4.$$

$$f(e'_4) = -7e'_2 + 4e'_3 + 7e'_4.$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở mới là $A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Câu 36: Ma trận của f trong có sở chính tắc của $\boldsymbol{P}_2$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & -5-\lambda & 1 \\ 3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 1 \\ 3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2+\lambda)^2 .$$

Câu 37: Ma trận của f trong có sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-3)^2 .$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$ (kép).

*) Giá trị riêng $\lambda = 1$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương

trình: $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

có hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -y \end{cases}$

$v = (-2y, y, -y) = -y(2,-1,1)$ chọn $v_1 = (2,-1,1)$.

**) Giá trị riêng $\lambda = 3$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ

phương trình $$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $x - y - z = 0$.

$v = (y + z, y, z) = y(1,1,0) + z(1,0,1)$ chọn $v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,1)$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở gồm các véc tơ riêng của f

$f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 3v_2$, $f(v_3) = 3v_3$.

CHƯƠNG 7

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	c	19	d
2	a	20	c
3	d	21	a
4	c	22	b
5	b	23	d
6	a	24	b
7	c	25	d
8	d	26	c
9	b	27	b
10	b	28	a
11	a	29	c
12	b	30	b
13	d	31	a
14	b	32	b
15	c	33	d
16	a	34	c
17	c	35	a
18	c	36	c

Câu 30: Ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2\\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(5-\lambda)$$

♦Với giá trị riêng $\lambda_1 = 5$, véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ

$\begin{cases} x - y \quad = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$ có nghiệm $x = y = z$

$\Rightarrow\ v = (x, x, x) = x(1,1,1)$. Chọn $u_1 = (1,1,1)$.

Trực chuẩn hoá được $v_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

♦ Với giá trị riêng $\lambda_2 = -1$ (nghiệm kép), véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình $x + y + z = 0$

$\Rightarrow\ v = (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$.

Chọn $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,0,-1)$.

Trực chuẩn hoá hai véc tơ này ta có

$v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $v_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix};\quad Q = 5X^2 - Y^2 - Z^2$$

Câu 37: Xét dạng toàn phương có biểu thức tọa độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ chéo hóa trực giao ma trận này ta tìm được cơ sở trực chuẩn mới $v_1=\left(1/\sqrt{5};-2/\sqrt{5}\right)$, $v_2=\left(2/\sqrt{5};1/\sqrt{5}\right)$;

$(x;y)=Xv_1+Yv_2 \quad \Rightarrow \quad Q(x,y)=-5X^2+5Y^2$.

Như vậy nếu đổi tọa độ $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$ thì đường bậc 2 đã cho có dạng chính tắc $\dfrac{X^2}{36}-\dfrac{Y^2}{36}=1$: Hyperbol

Câu 38. $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13}\\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$; $13Y^2+\dfrac{10}{\sqrt{13}}Y-\dfrac{24}{\sqrt{13}}X+1=0$:

Parabol

Câu 39. $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}$;

$$\frac{\left(X+\sqrt{6}\right)^2}{17}+\frac{Y^2}{34}+\frac{\left(Z+\sqrt{3}\right)^2}{34}=1 \text{ : Ellipsoid}$$

Câu 40. $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}$;

$$\frac{\left(X-2\sqrt{3}\right)^2}{9}-\frac{Y^2}{18}-\frac{\left(Z-\sqrt{6}\right)^2}{18}=1 \text{ : Hyperbolic 2 tầng}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1.G. M. FICHTENGÔN, Giáo trình phép tính vi tích phân, Tập 1,2,3. Nauka, Moskva,1969. (tiếng Nga)

2.G. M. FICHTENGÔN, Cơ sở giải tích toán học, Tập 1,2,3. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1977.

3.K. MAURIN, Analiza, *Czes̀ć* 1. PWN, Warszawa, 1976.

4.R. A. ADAMS, Calculus-a complete, Addison,Wesley, New York,Don Mills, 1991.

5.NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên), Toán học cao cấp ,Tập 1,2,3. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà nội, 1990.

6.JEAN-MARIE MONIER, Giáo trình toán, Tập 1,2,3,4. NXB Giáo dục, Hà nội, 1999 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris,1999)