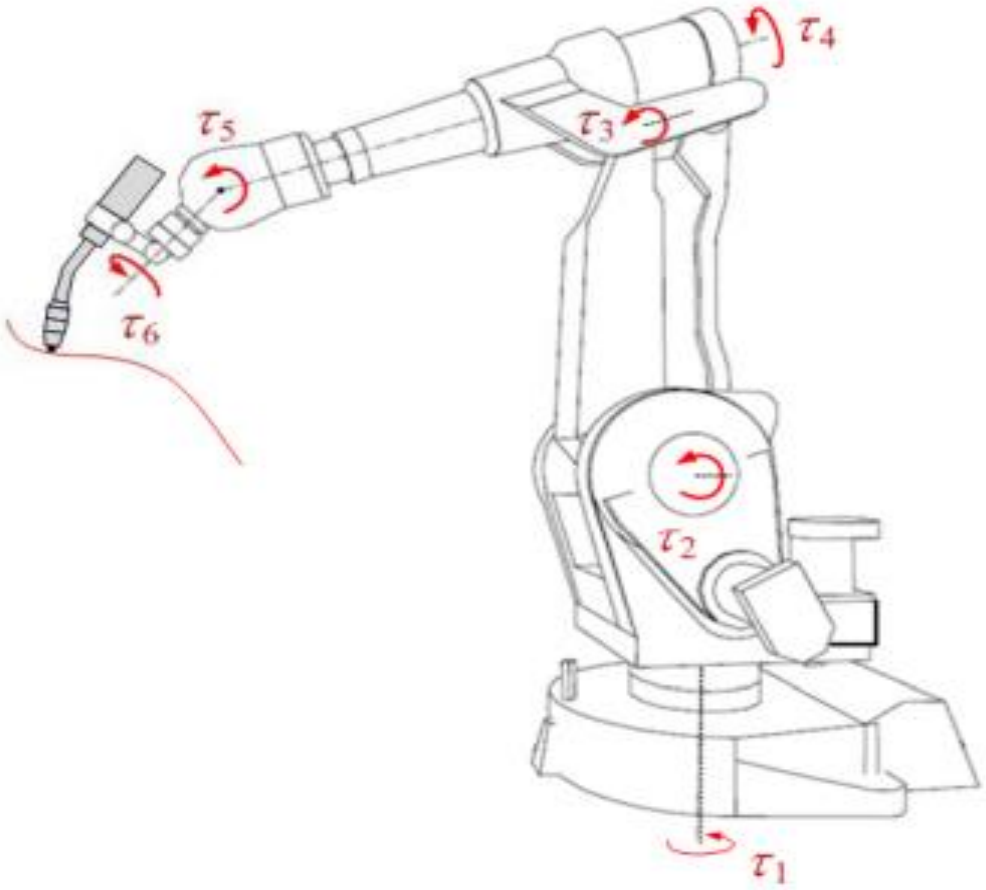
ĐỘNG LỰC HỌC CHO ROBOT

Th.S Nguyễn Tấn Phúc.
Tel: 01267102772.
Bộ môn CĐT- ĐH Nông Lâm Tp.HCM.



BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC

Nhắc lại bài toán động học:

Xác định vị trí : biết góc khớp → vị trí khâu cuối
Bài toán vận tốc – ma trận Jacobian.
Bài toán động học ngược: vị trí EF → quỹ đạo góc khớp

MỤC ĐÍCH - PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU ĐỘNG LỰC HỌC

Cho mục đích thiết kế , điều khiển robot , cần thiết phải có một mô hình toán học thể hiện mối quan hệ động lực học tác dụng lên robot .

Cần xây dựng các phương trình vi phân cho chuyển động của robot dựa trên cơ sở các định luật bảo toàn năng lương cho robot,

Nghiên cứu động lực học nhằm giải quyết bài toán sau cho robot:

Tính toán các lực khớp và các momen tại các góc khớp phát sinh trong quá trình chuyển động của robot.

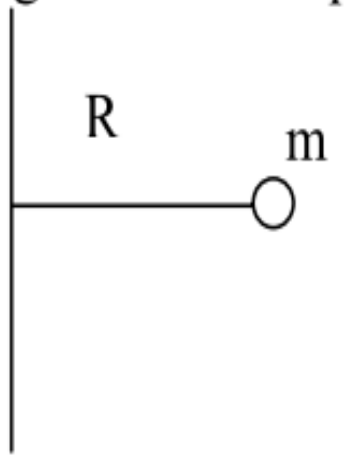
Xác định các sai số so với chuyển động đã hoạch định làm cơ sở cho quá trình điều khiển robot.

NHẮC LẠI CƠ HỌC VẬT RẮN

Lực và mômen quán tính

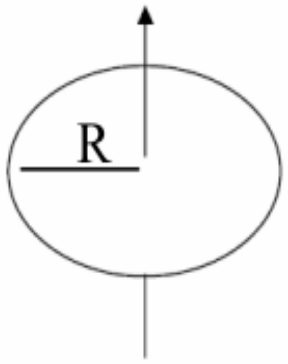
- Chuyển động tịnh tiến $F_{qt} = m.a$ với m: khối lượng; a: gia tốc dài
- Chuyển động quay $T_{qt} = I.\varepsilon$ với I: mô men quán tính; ε: gia tốc góc

Mô men quán tính của chất điểm khối lượng m cách tâm quay bán kính R



$I = m.R^2$

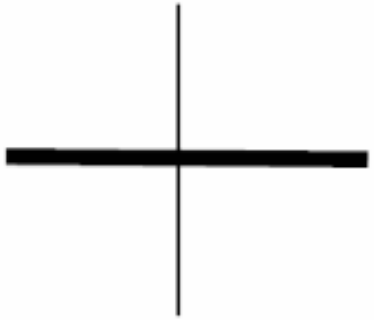
Mô men quán tính của đĩa hình tròn khối lượng m, bán kính R



$$I = \frac{m.R^2}{2}$$

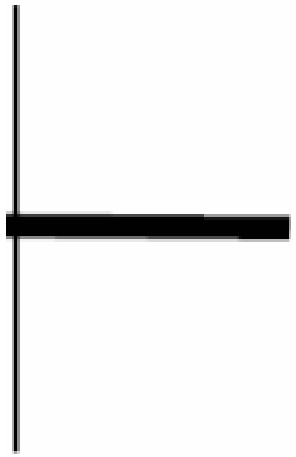
Mô men quán tính của hình cầu đặc khối lượng m, bán kính R

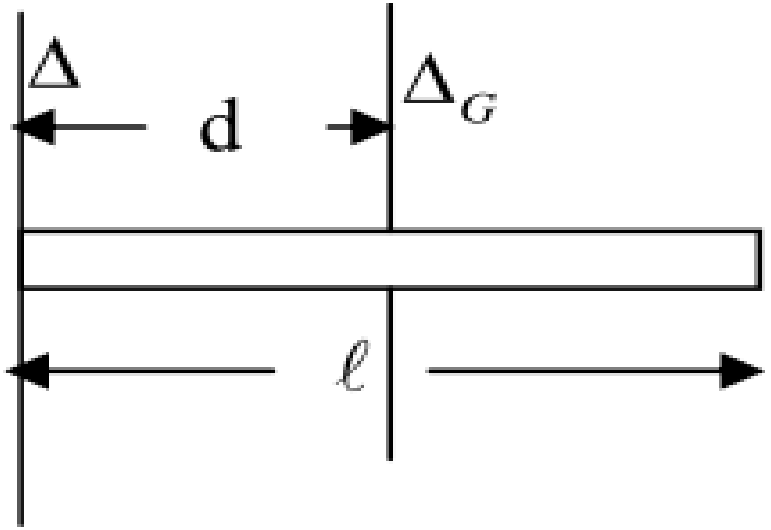
$$I = \frac{2}{5} m.R^2$$



$$I = \frac{1}{12} m.L^2$$

$$I = \frac{1}{3} m.L^2$$





$$I_\Delta = I_G + m.d^2$$

NHẮC LẠI VỀ VECTOR

Tích vô hướng của 2 véc tơ là một đại lương vô hướng

Có 2 véc tơ $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

Vậy $a.b = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Tích có hướng của 2 véc tơ là một véc tơ

Có 2 véc tơ $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

Vậy $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$a \times b = (a_2.b_3 - a_3.b_2)i - (a_1.b_3 - a_3.b_1)j + (a_1.b_2 - a_2.b_1)k$$

CÁC VẤN ĐỀ ĐỊNH LUẬT NĂNG LƯỢNG

Động năng: $K_L = \frac{m.v^2}{2}$ Tịnh tiến

$K_R = \frac{I.\omega^2}{2}$ quay

Động năng của vật rắn vừa tịnh tiến vừa quay

$K = K_L + K_R$

Thế năng $P = m.g.h$

Lực Coriolis

$F_{Cor} = 2.m.v \times \omega$

Định luật bảo toàn năng lượng.

$$KE + PE = const$$

KE là động năng của hệ (kinetic energy)

PE là thế năng của hệ (potential energy)

Để lập phương trình chuyển động , ta cần đạo hàm theo thời gian.

PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC LAGRANGE-EULER.

$$L = K - P$$

K là tổng động năng của cơ hệ

L là tổng thế năng của cơ hệ

Định nghĩa : Lực (hay momen) tổng quát tác dụng lên khâu thứ i được xác định bởi phương trình Lagrange :

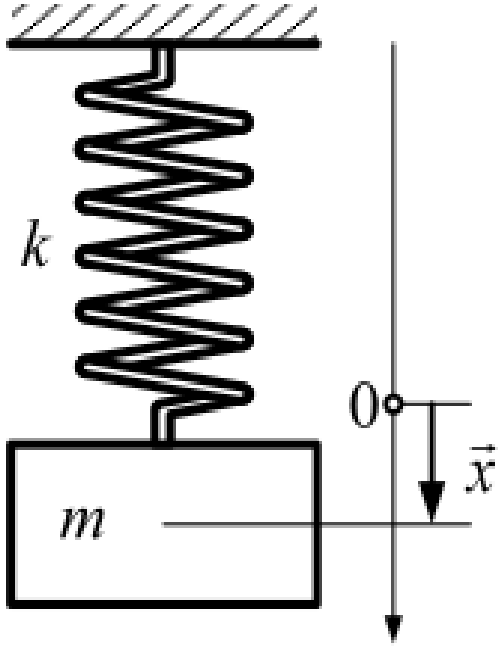
$$F = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$$

Ví dụ 1: **Lập phương trình động lực học cho cơ hệ:**



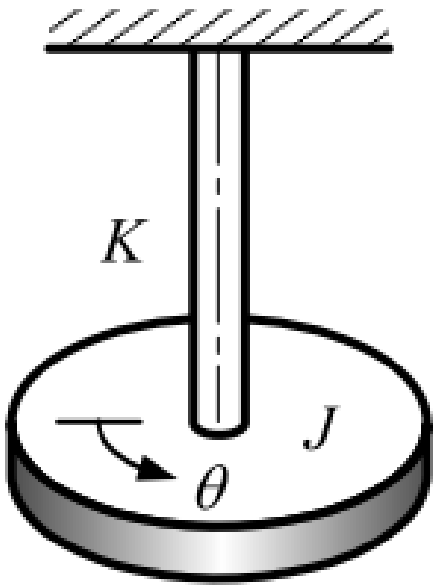
Động năng: $KE = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

Thế năng $PE = \frac{1}{2} kx^2$

Hàm Lagrange $L = KE - PE = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Ví dụ 2: Lập phương trình cho cơ hệ bên dưới



Động năng: $KE = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

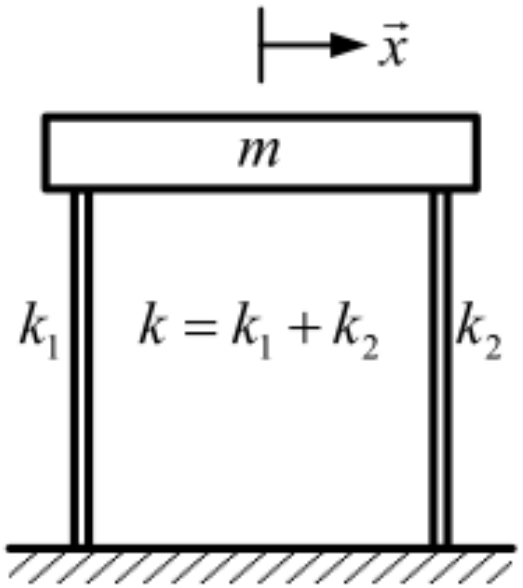
Thế năng $PE = \frac{1}{2} K \theta^2$

Hàm Lagrange $L = KE - PE = \frac{1}{2} J \theta^{\bullet^2} - \frac{1}{2} K \theta^2$

$$F = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{J} \theta = 0$$

Ví dụ 3: Lập phương trình cho cơ hệ bên dưới



Động năng: $$KE = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

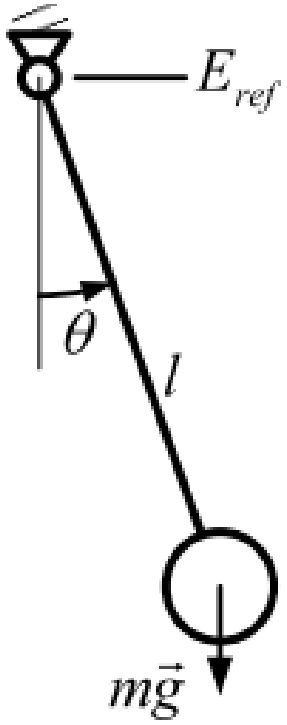
Thế năng $$PE = \frac{1}{2} kx^2$$

Hàm Lagrange $$L = KE - PE = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$F = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Ví dụ 4: Lập phương trình cho cơ hệ bên dưới



Động năng: $KE = \frac{1}{2} m\left(l\dot{\theta}\right)^2$

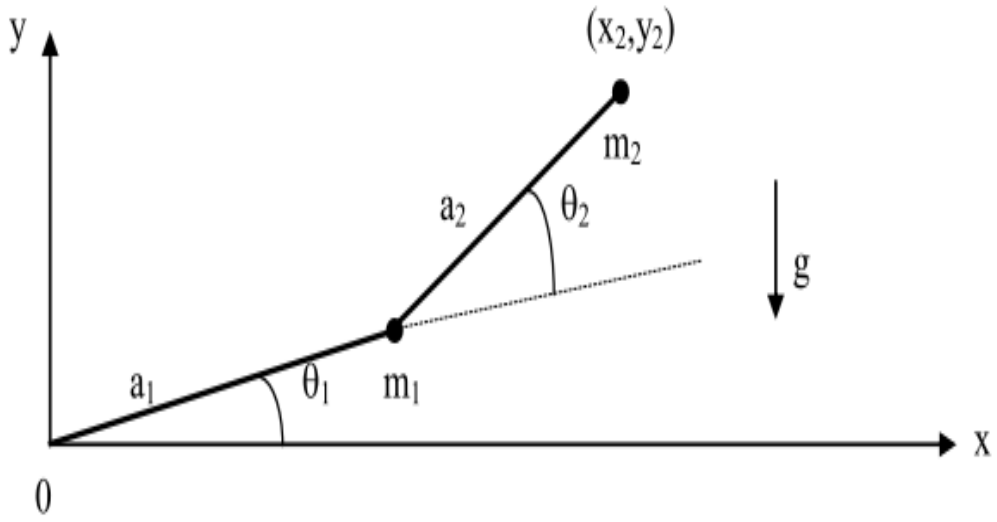
Thế năng $PE = E_{ref} - mgl\cos\theta$

Hàm Lagrange $L = K - P = \frac{1}{2} m(l\theta^{\bullet})^2 + mgl\cos\theta = 0$

$$F = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

VÍ DỤ ROBOT 2 BẬC TỰ DO RR



$$K_1 = \tfrac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$P_1 = m_1 g a_1 \sin\theta_1$$

$$x_2 = a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = -a_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

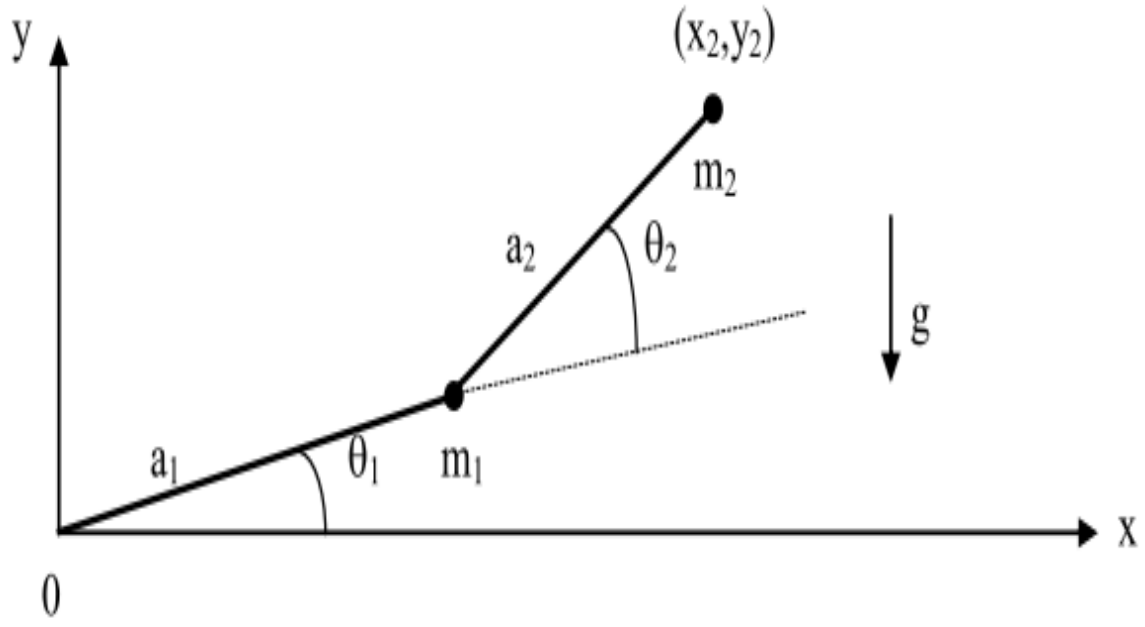
$$\dot{y}_2 = a_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = a_1^2\dot{\theta}_1^2 + a_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2a_1a_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_2 a_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 a_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 a_1 a_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g[a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$L = K - P = K_1 + K_2 - P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 a_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 +$$
$$+ m_2 a_1 a_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\cos\theta_2 - (m_1 + m_2)g a_1 \sin\theta_1 - m_2 g a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$



$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)a_1^2+m_2a_2^2+2m_1m_2cos\theta_2 & m_2a_2^2+m_2a_1a_2cos\theta_2 \\ m_2a_2^2+m_2a_1a_2cos\theta_2 & m_2a_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+ \qquad (2.19)$$

$$+\begin{bmatrix} -m_2a_1a_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2)sin\theta_2 \\ m_2a_1a_2\dot{\theta}_1^2sin\theta_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (m_1+m_2)ga_1cos\theta_1+m_2ga_2cos(\theta_1+\theta_2) \\ m_2ga_2cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$M(\bar{\theta}).\ddot{\bar{\theta}}+\bar{V}(\bar{\theta},\dot{\bar{\theta}})+\bar{G}(\bar{\theta})=\bar{\tau}$$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC DẠNG TỔNG QUÁT CỦA 1 ROBOT

$$M(\theta).\ddot{\theta} + V(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta) = \tau$$

Động năng tổng quát:

Động năng của vật

$$K = \frac{1}{2}m.v^T.v + \frac{1}{2}\omega^T.\mathrm{I}.\omega$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}$$

Với $D(q)$ là ma trận quán tính

Thế năng tổng quát

Thế năng khâu thứ i

$$P_i = g^T r_{ci} m_i$$

Thế năng

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} g^T r_{ci} m_i$$

Hàm Lagrange

$$L = K - P = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{n} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - P(q)$$

$$\sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{ij}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k$$

$$\Rightarrow \sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{ij} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \phi_k(q) = \tau_k$$

Hay viết lại dưới dạng ma trận

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC DẠNG TỔNG QUÁT CỦA 1 ROBOT

Dạng tổng quát của phương trình động lực học được hình thành từ phép lặp Newton-Euler luôn luôn có thể được biểu diễn như sau (ở dạng phương trình không gian trạng thái):

$$\boldsymbol{\tau} = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

Với:

- $M(\Theta)$ - là ma trận khối lượng của robot ($n \times n$)
  - ma trận vuông đối xứng, luôn luôn khả nghịch.
  - chỉ phụ thuộc thành phần vị trí
- $V(\Theta, \dot{\Theta})$ - là một vector ($n \times 1$) mô tả các thành phần ly tâm và Coriolis
  - phụ thuộc vào cả thành phần vị trí và vận tốc
- $G(\Theta)$ - là một vector ($n \times 1$) mô tả thành phần trọng lượng
  - chỉ phụ thuộc thành phần vị trí

BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC NGHIÊN CỨU CÁI GÌ ?

Từ phương trình động lực học,

$$\boldsymbol{\tau} = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta, \dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

cơ bản ta có hai bài tóan:

- Bài tóan động lực học thuận:

$$\boldsymbol{\tau} \rightarrow (\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}, \ddot{\boldsymbol{\Theta}})$$

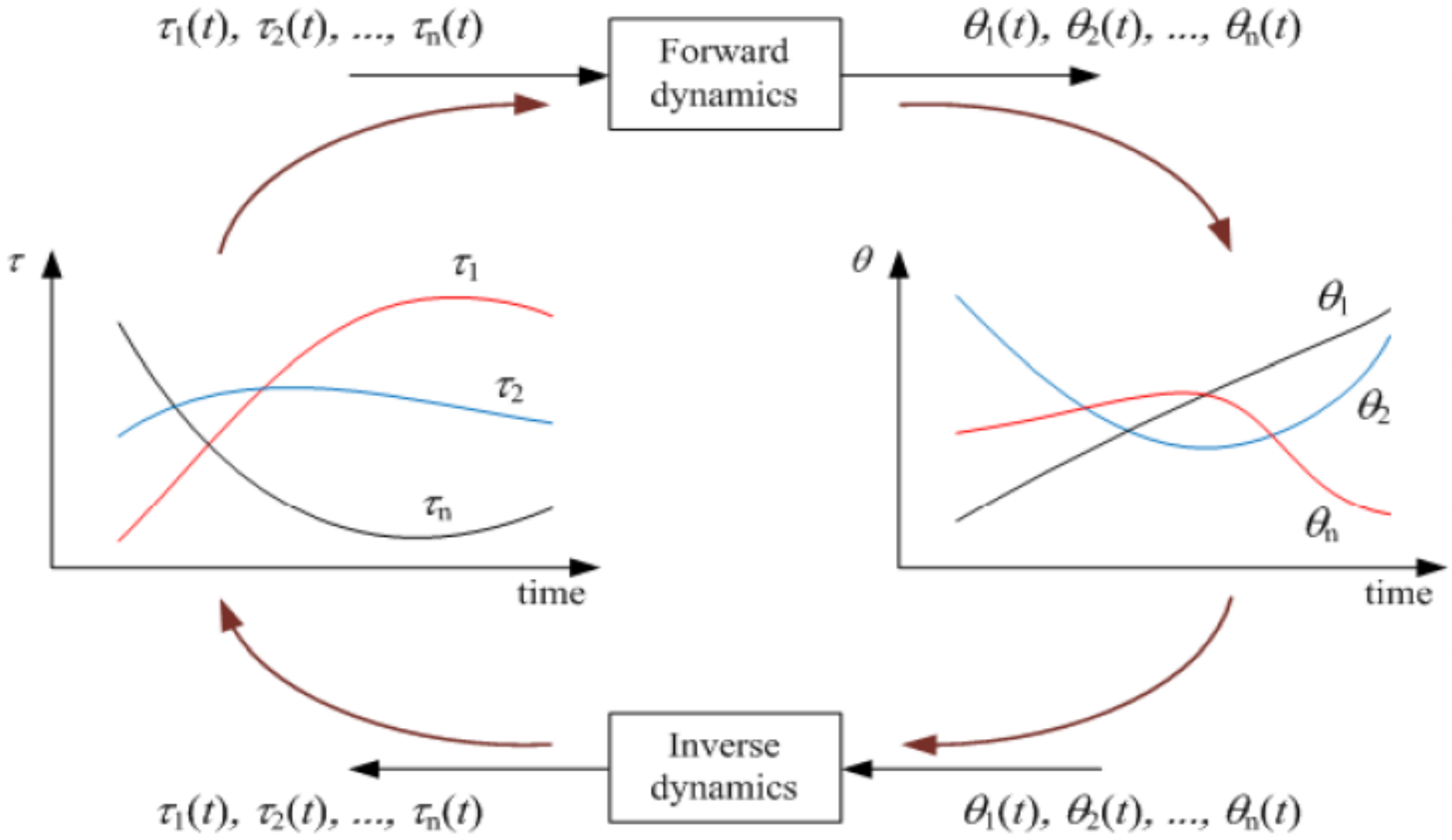
  - mô phỏng chuyển động của robot khi biết các moment tạo ra từ các động cơ.

- Bài tóan động lực học ngược:

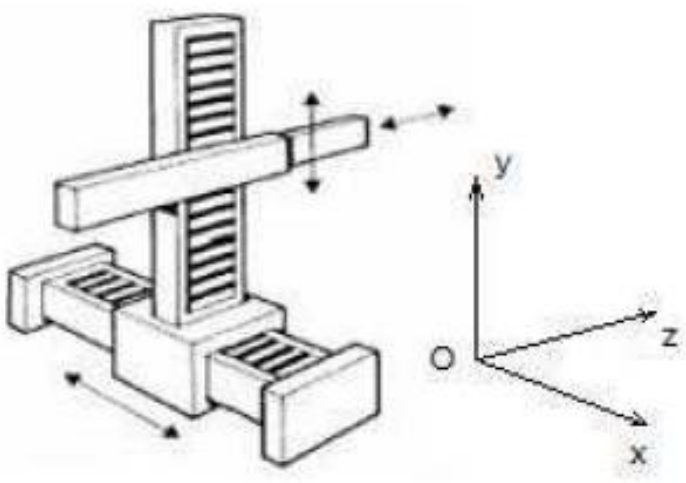
$$(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}, \ddot{\boldsymbol{\Theta}}) \rightarrow \boldsymbol{\tau}$$

  - tính tóan các moment cần thiết (cung cấp cho quá trình điều khiển) để thực hiện chuyển động mong muốn

2 DẠNG BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC



PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC CHO CARTESIAN ROBOT



$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 \qquad K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad K_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = m_2 g y \qquad P_3 = m_3 g y$$

Đặt $L = (K_1 + K_2 + K_3) - (P_1 + P_2 + P_3)$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (m_2 + m_3) g y$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial L}{\partial p} = F \qquad \text{Với } F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} = F_1$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{y} + (m_2 + m_3) g = F_2$$

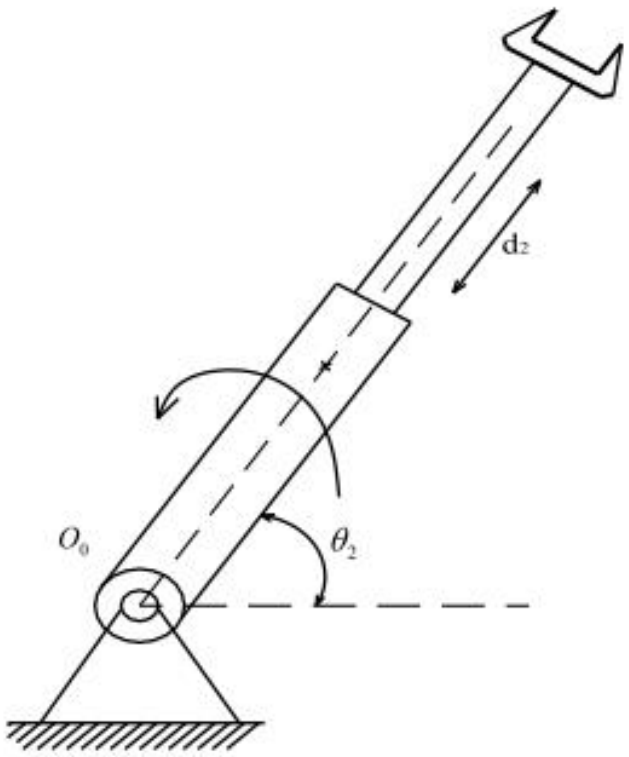
$$m_3 \ddot{z} = F_3$$

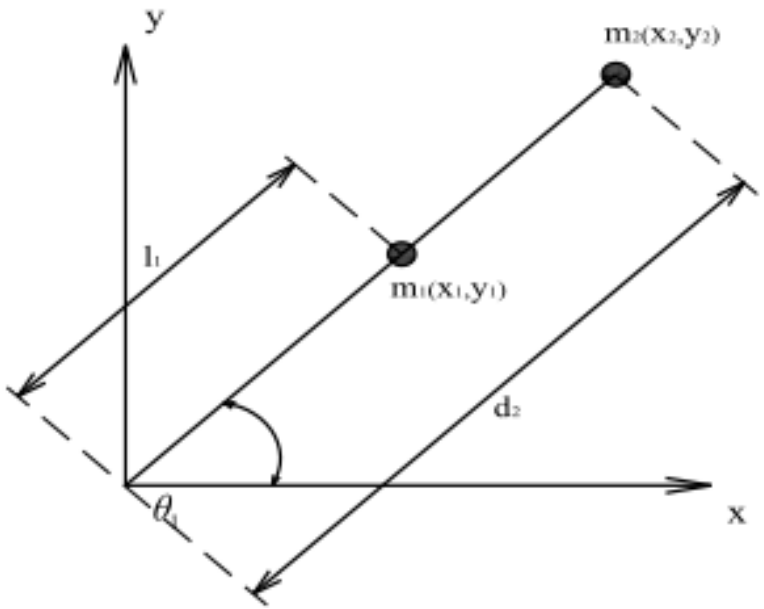
PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CARTESIAN ROBOT

$$\begin{bmatrix} m1+m2+m3 & 0 & 0 \\ 0 & m2+m3 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (m2+m3)g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix}$$

$$M(\mathrm{q})\ddot{\mathrm{q}} + V(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}}) + G(\mathrm{q}) = \tau$$

ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT 2 KHÂU RT





$$K_1 = \tfrac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$P_1 = m_1 g l_1 \sin\theta_1$$

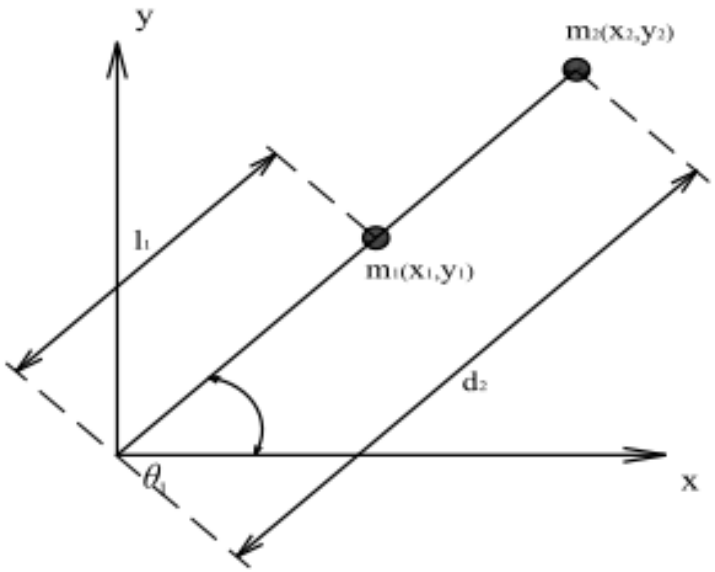
$$x_2 = d_2 \cos\theta_1$$

$$y_2 = d_2 \sin\theta_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{d}_2 \cos\theta_1 - d_2\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

$$\dot{y}_2 = \dot{d}_2 \sin\theta_1 + d_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$

ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT 2 KHÂU RT



$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = d_2{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + \dot{d}_2{}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 d_2{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2{}^2$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g d_2 \sin\theta_1$$

$$L = K - P = K_1 + K_2 - P_1 - P_2 = \frac{1}{2}m_1 l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 d_2{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2{}^2 - m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 g d_2 \sin\theta_1$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_1{}^2 + m_2 d_2{}^2)\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2{}^2 - (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \sin\theta_1$$

ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT 2 KHÂU RT

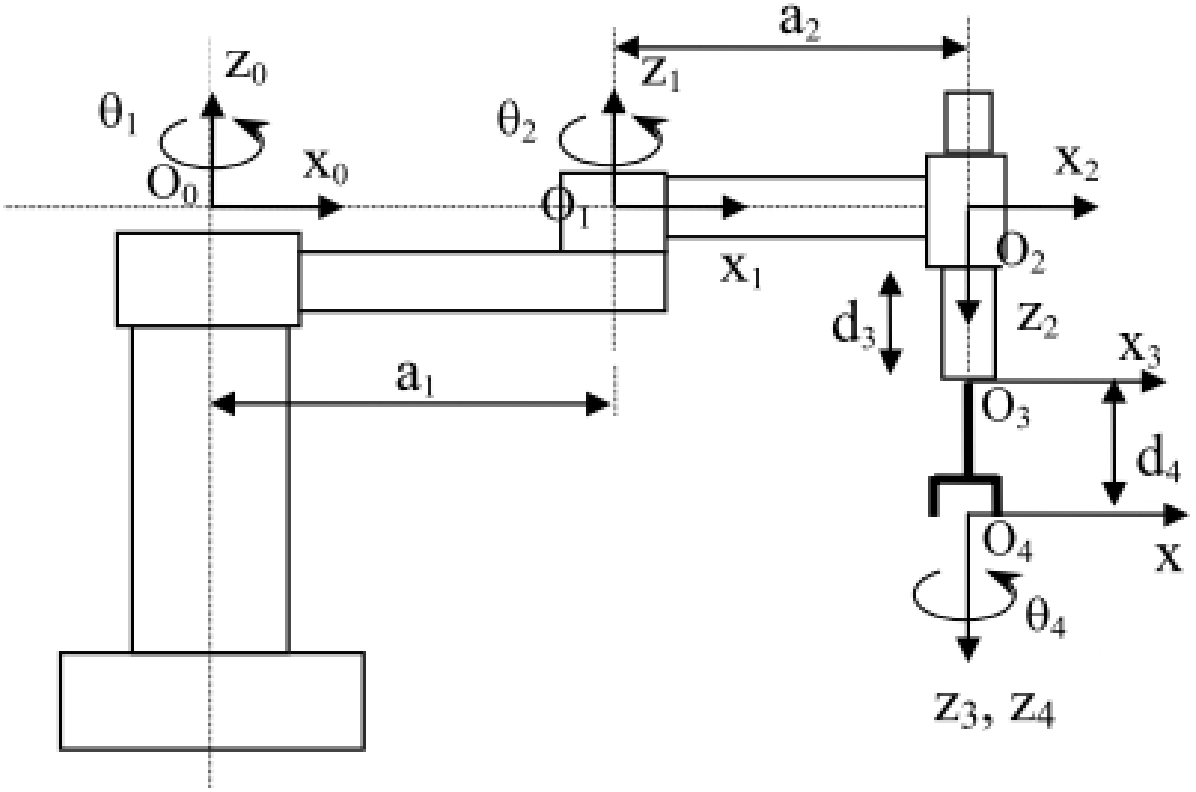
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2(2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + d_2^2 \ddot{\theta}_1) \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} = m_2 \dot{d}_2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} = m_2 \ddot{d}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial d_2} = m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g \sin\theta_1$$

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos\theta_1 \\ m_2 g \sin\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = \tau$$

SCARA ROBOT



Chú ý: bao gồm robot 2 khâu và khâu tịnh tiến theo phương z.
SV về tự giải và tham khảo kết quả.

$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)a_1^2+m_2a_2^2+2m_1m_2cos\theta_2 & m_2a_2^2+m_2a_1a_2cos\theta_2 \\ m_2a_2^2+m_2a_1a_2cos\theta_2 & m_2a_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+ \qquad (2.19)$$

$$+\begin{bmatrix} -m_2a_1a_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2)sin\theta_2 \\ m_2a_1a_2\dot{\theta}_1^2sin\theta_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (m_1+m_2)ga_1cos\theta_1+m_2ga_2cos(\theta_1+\theta_2) \\ m_2ga_2cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

– **Khâu 3:**

Động năng : $K_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{z}_3^2$

Thế năng : $P_3 = m_3 g z_3$.

Áp dụng lagrange

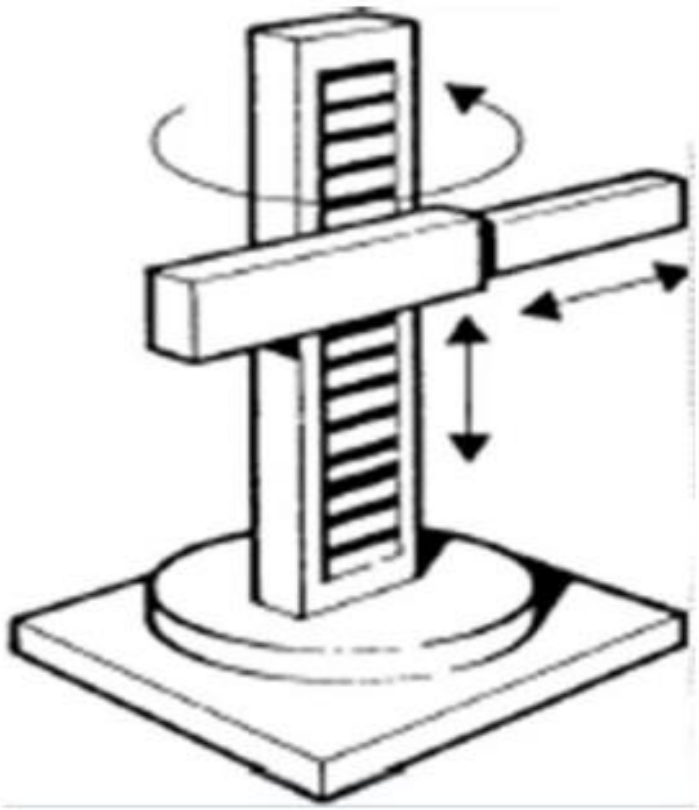
$$m_3\ddot{z}_3 - m_3 g = \tau_3$$

$$
\begin{bmatrix}
(m_1+m_2)a_1^2+m_2a_2^2+2m_1m_2\cos\theta_2 & m_2a_2^2+m_2a_1a_2\cos\theta_2 & 0 \\
m_2a_2^2+m_2a_1a_2\cos\theta_2 & m_2a_2^2 & 0 \\
0 & 0 & m_3
\end{bmatrix}
.
\begin{bmatrix}
\ddot{\theta}_1 \\
\ddot{\theta}_2 \\
\ddot{z}_3
\end{bmatrix}
$$

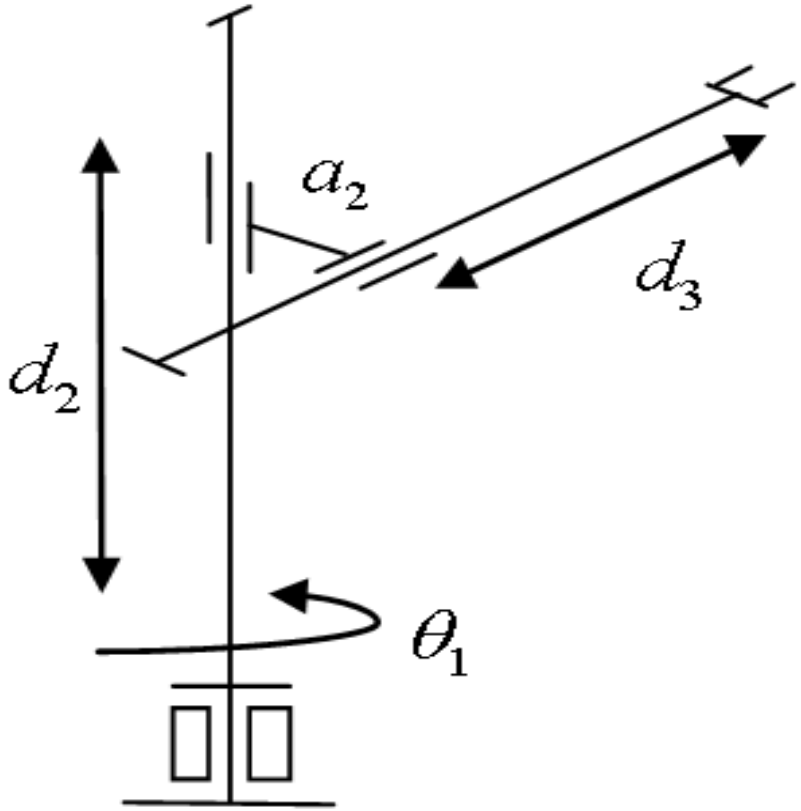
$$
+\begin{bmatrix}
(m_1+m_2)ga_1\cos\theta_1+m_2ga_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\
m_2ga_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\
-m_3g
\end{bmatrix}
$$

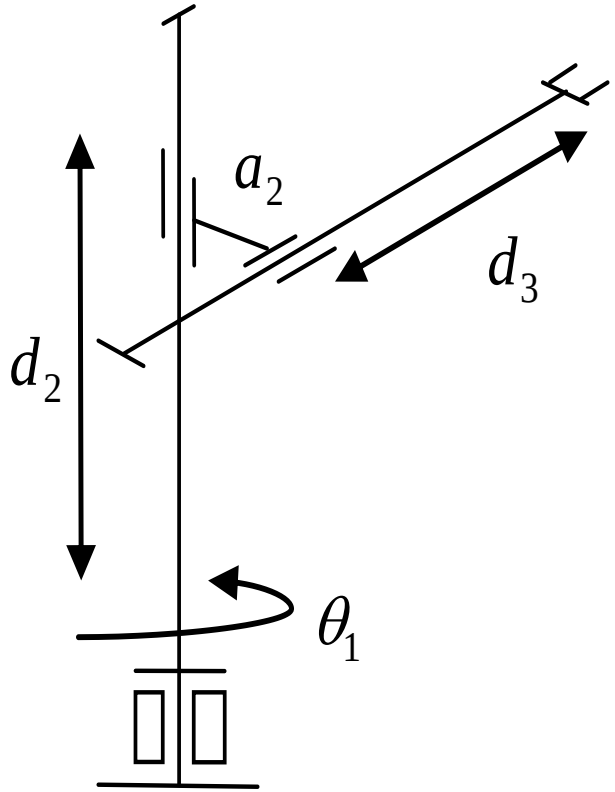
$$
+\begin{bmatrix}
-m_2a_1a_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^{\,2})\sin\theta_2 \\
m_2a_1a_2\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2 \\
0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\tau_1 \\
\tau_2 \\
\tau_3
\end{bmatrix}
$$

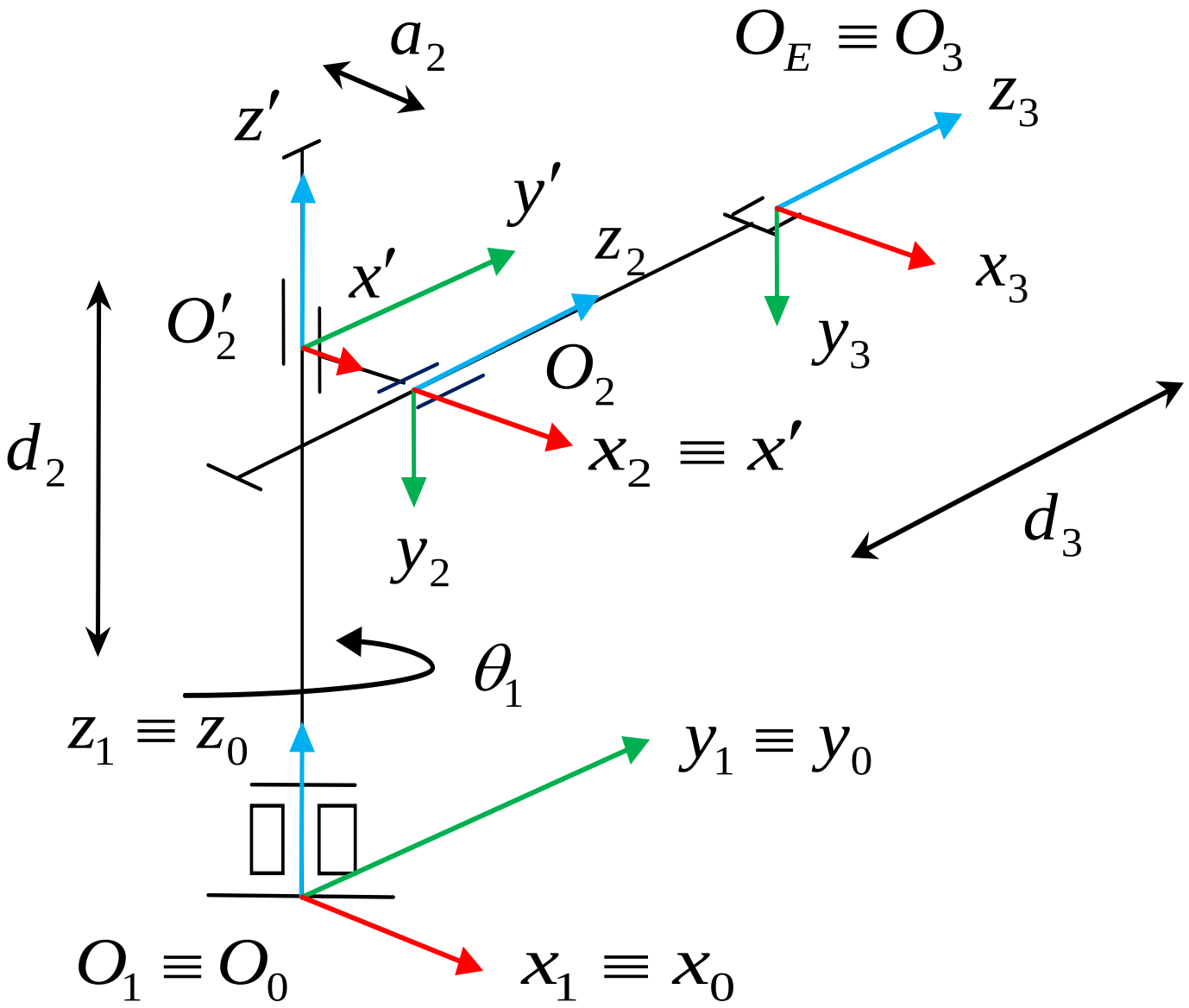
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC HỌC CHO ROBOT RTT CÓ TỌA ĐỘ HÌNH TRỤ NHƯ SAU- về nhà…



Hình 1.1 Mô hình robot trụ




a_2
d_3
d_2
θ_1


a_2
$O_E \equiv O_3$
z'
z_3
y'
z_2
x'
x_3
O_2'
y_3
O_2
d_2
$x_2 \equiv x'$
d_3
y_2
θ_1
$z_1 \equiv z_0$
$y_1 \equiv y_0$
$O_1 \equiv O_0$
$x_1 \equiv x_0$

Khâu	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	θ_1^*	0	0	0
2	0	-90	a_2	d_2^*
3	0	0	0	d_3^*

Trong đó:

θ_1^*, d_2^*, d_3^* : Là các biến khớp

a_2 : Chiều dài khâu 2

$$M(q)=\begin{bmatrix} (J_1+J_2+m_3a_2^2+m_3l^2+m_3d_3^2-2m_3d_3l) & 0 & \frac{1}{2}m_3a_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ \frac{1}{2}m_3a_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$V(q,\dot{q})=\begin{bmatrix} \dot{d}_3(2m_3d_3-m_3l)\dot{\theta} \\ 0 \\ -(d_3-l)m_3\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q)=\begin{bmatrix} 0 \\ (m_2+m_3)g \\ 0 \end{bmatrix}$$

CHÚC CÁC BẠN MAY MẮN……