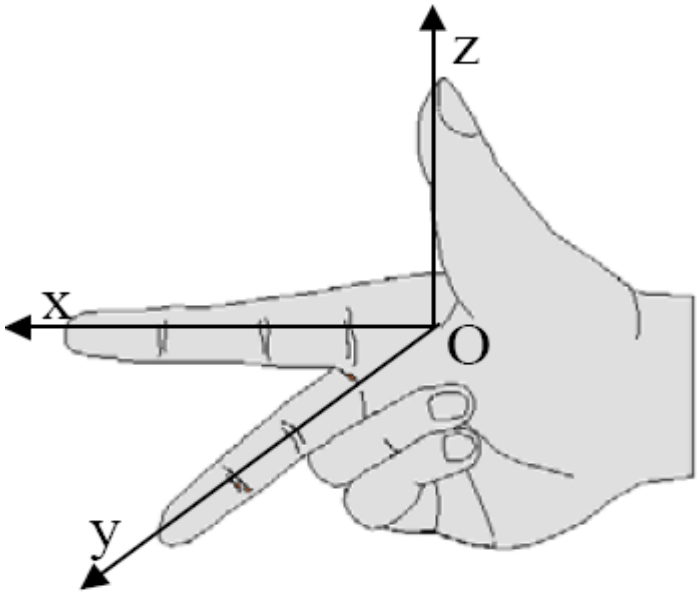
CHƯƠNG 3 :
CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TỌA ĐỘ

GV: Th.S Nguyễn Tấn Phúc.
Tel: 01267102772.
Email: phucpfiev1@gmail.com

ĐỘNG HỌC ROBOT

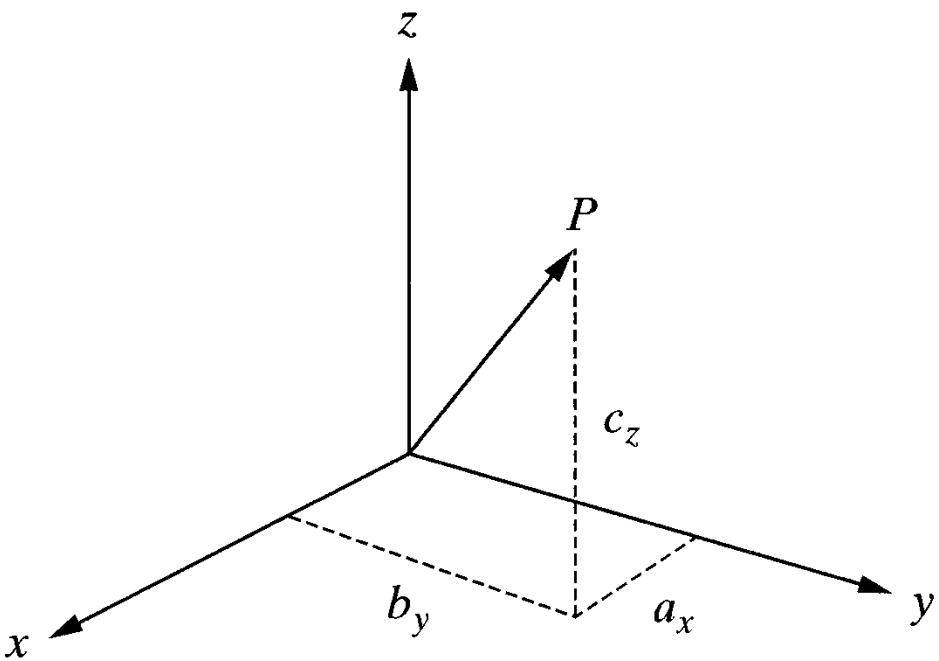
2.1. Vị trí và hướng của vật rắn trong không gian

Hệ tọa độ vật:



Qui tắc bàn tay phải

Biểu diễn ma trận

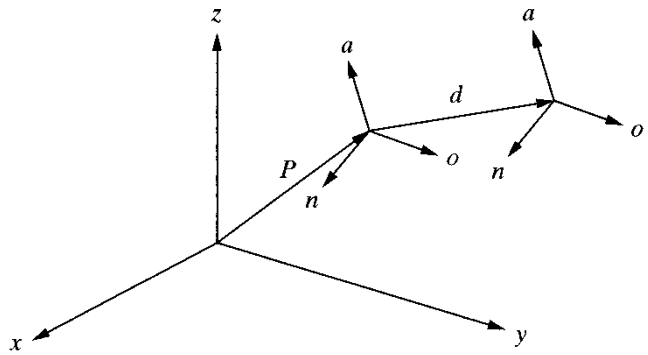


$$\overline{P} = a_x \hat{i} + b_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

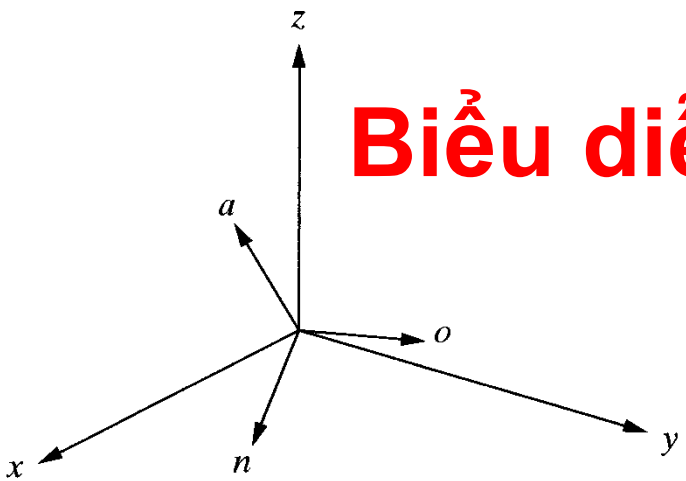
$$a_x = \frac{x}{w}; b_y = \frac{y}{w}; c_z = \frac{z}{w}$$

Biểu diễn ma trận



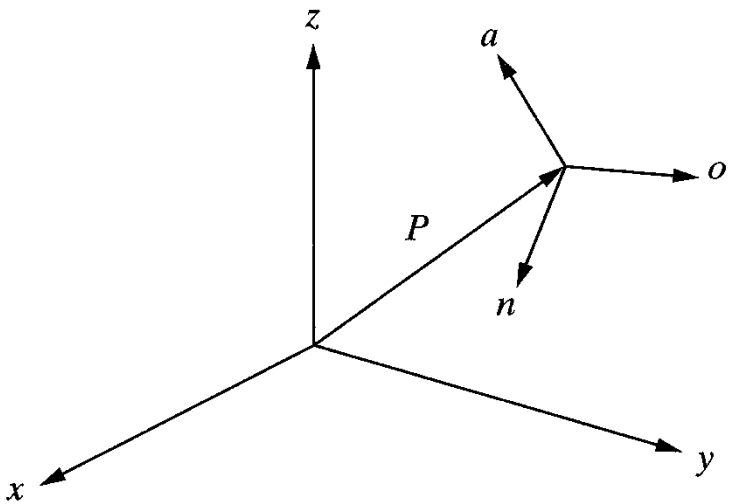
Tịnh tiến:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



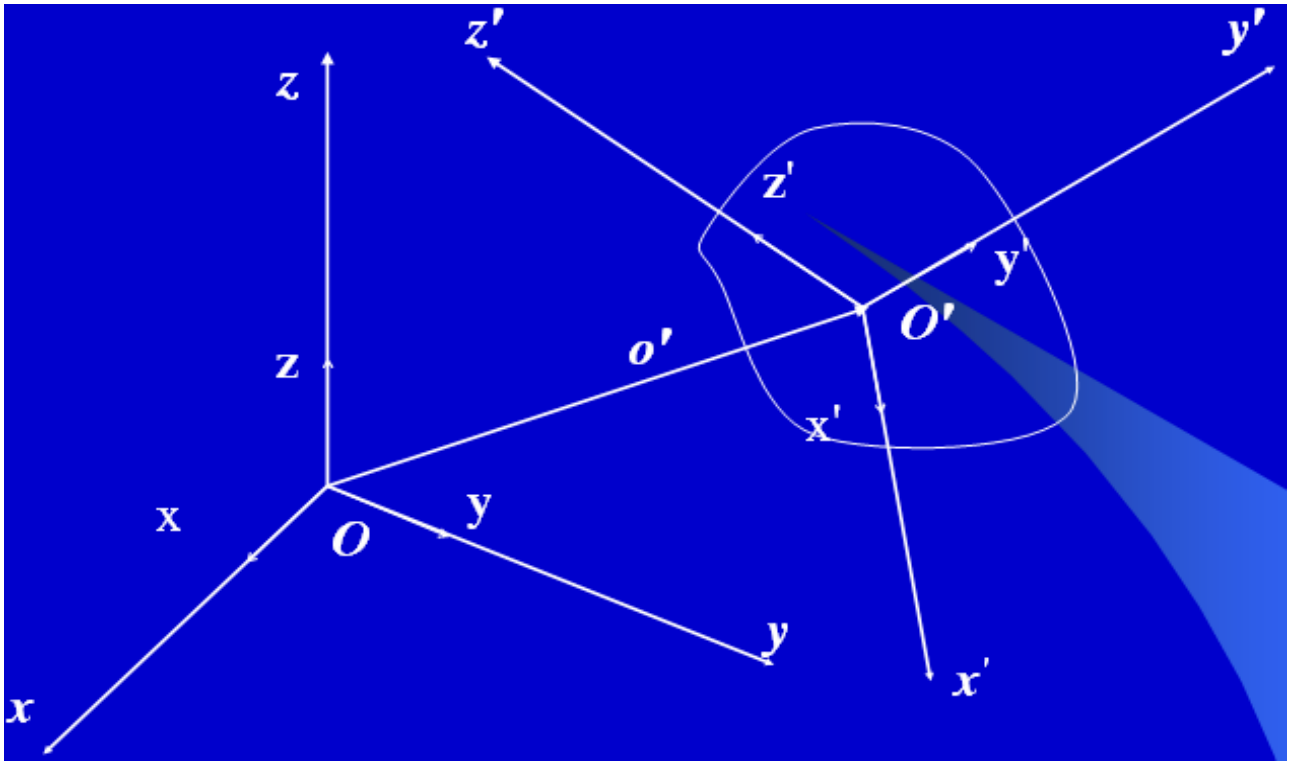
Quay:

$$F = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Quay và tịnh tiến

$$F = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hệ tọa độ gốc: Oyxz với các véc tơ đơn vị là x, y, z

Vị trí và định hướng của của vật rắn trong không gian
➔ gắn lên hệ quy chiếu địa phương O'x'y'z'

$$O' = o'_x\, x + o'_y\, y + o'_z\, z \quad \rightarrow \quad o' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

Biểu diễn ma trận

Biểu diễn ma trận

Hướng của vật <== các véc tơ đơn vị x’, y’, z’:

$$x' = x'_x x + x'_y y + x'_z z$$
$$y' = y'_x x + y'_y y + y'_z z$$
$$z' = z'_x x + z'_y y + z'_z z$$

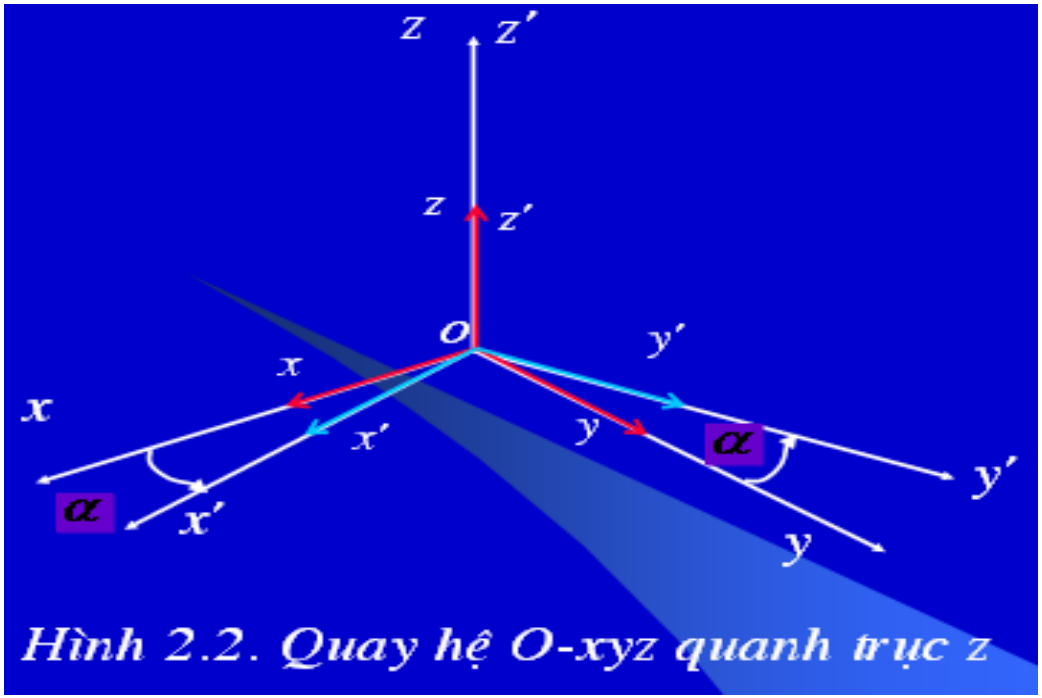
Các thành phần của các véc tơ đơn vị (x'_x, x'_y, x'_z) là cosin chỉ phương của các trục của hệ tọa độ địa phương so với hệ quy chiếu chung.

$X'_x = X'.\cos(X',X),\ldots$

$$R = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix}$$

Ma trận quay

Quay quanh trục X,Y,Z



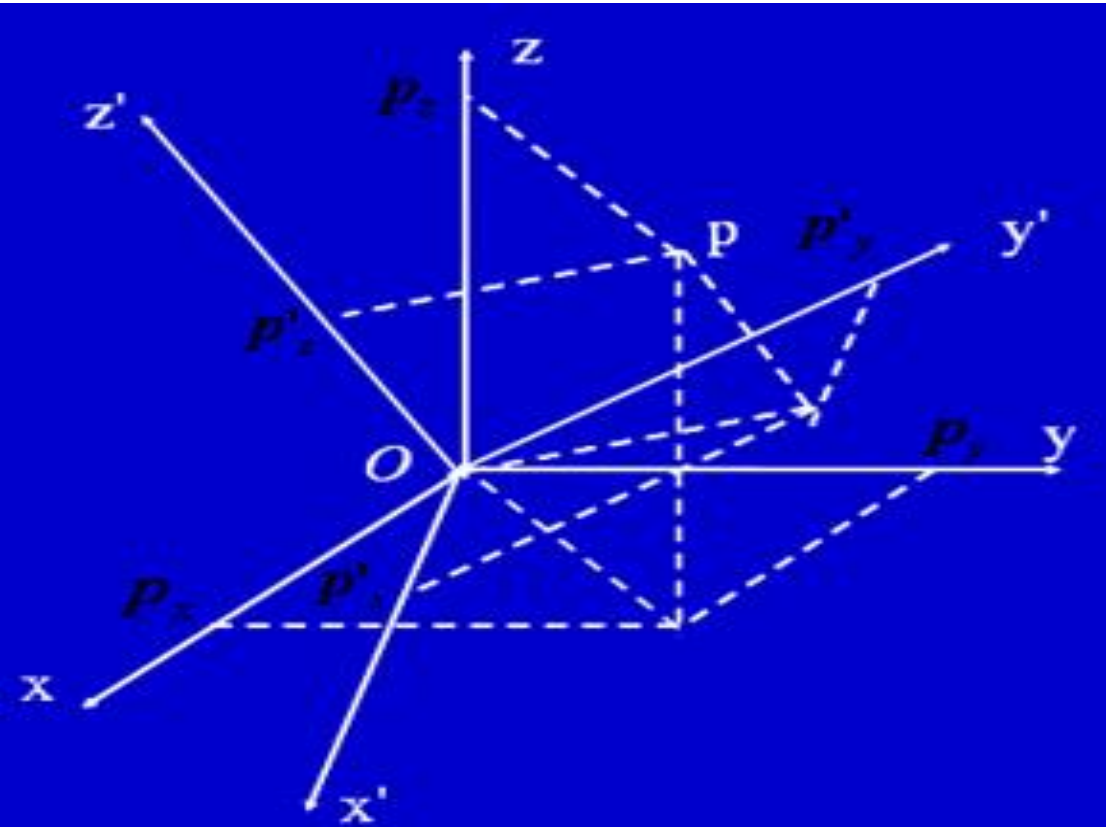
Hình 2.2. Quay hệ O-xyz quanh trục z

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Quay một véc tơ



$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}; p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

$$p = p' = p'_x\, x' + p'_y\, y' + p'_z\, z'$$

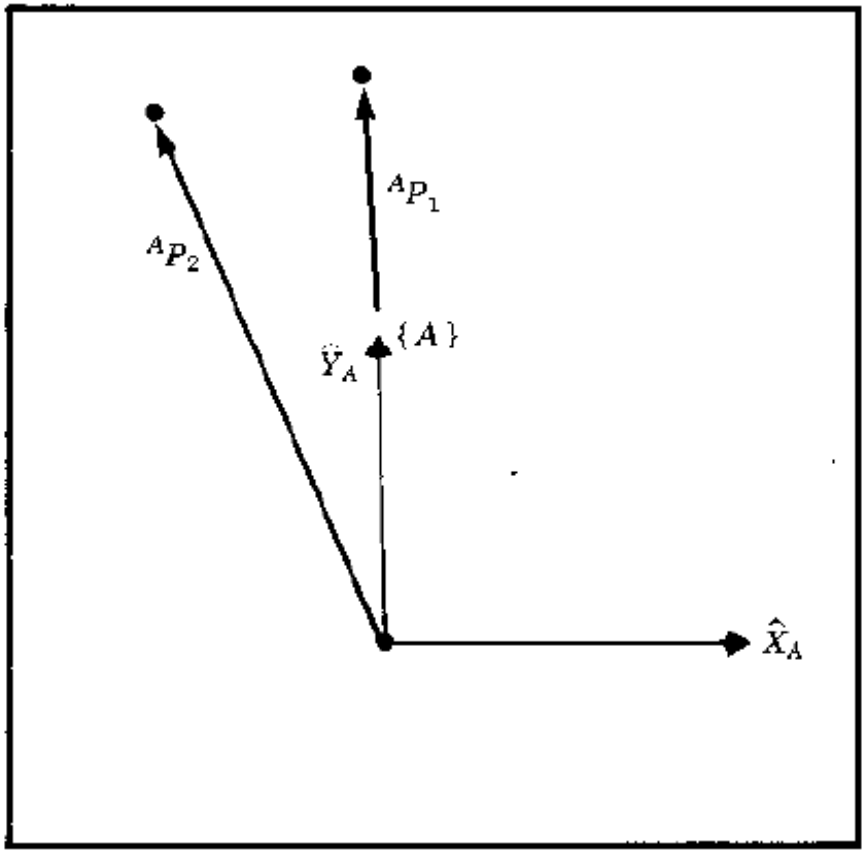
$$= \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} p' = Rp'$$

Hay: $p' = R^T p$

Quay quanh trục z ➔

$$p = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p'$$

Ví dụ

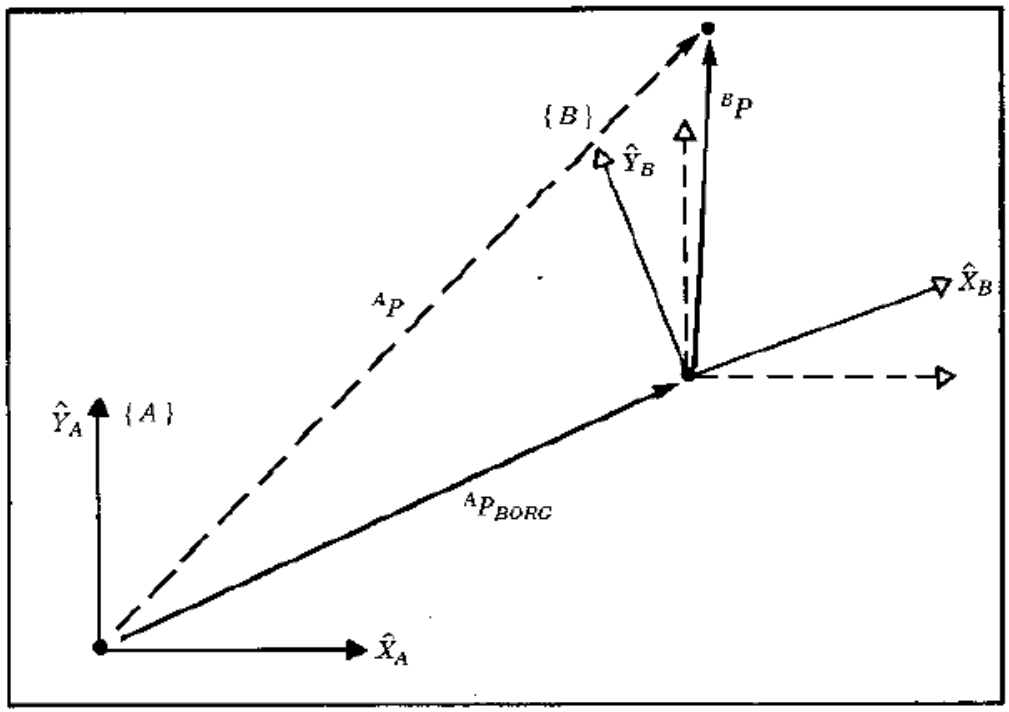


$$R_Z(30.0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$^{A}P_2 = R_Z(30.0)\,^{A}P_1 = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Figure 2.8 shows a frame $\{B\}$ which is rotated relative to frame $\{A\}$ about $\hat{Z}$ by 30 degrees, and translated 10 units in $\hat{X}_A$, and 5 units in $\hat{Y}_A$. Find ${}^{A}P$ where ${}^{B}P = [3.0\ 7.0\ 0.0]^T$.



$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 7.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \end{bmatrix} $$

Ví dụ

MA TRẬN THUẦN NHẤT

Ma trận thuần nhất có thể dùng để:

- mô tả hệ tọa độ: ${}^{A}_{B}T$ mô tả {B} so với {A}
- thực hiện chuyển đổi hệ tọa độ (ánh xạ): ${}^{B}P \rightarrow {}^{A}P$
- đóng vai trò như một toán tử: ${}^{A}P_1 \rightarrow {}^{A}P_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad {}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ý NGHĨA MA TRẬN QUAY

Xét một phép quay quanh trục X 30, quay quanh trục Z 30.

Ta có:

$$R_X(30^0) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \qquad R_Z(30^0) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

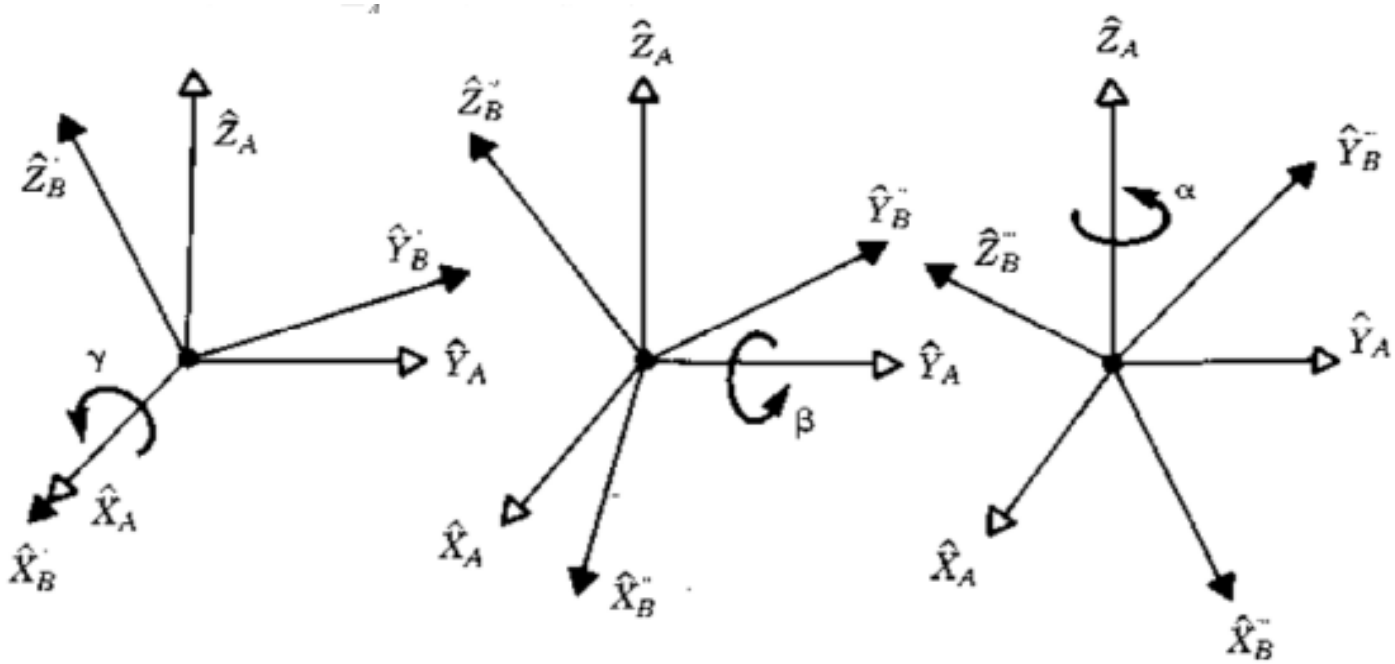
$$R_X(30^0)R_Z(30^0) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.50 & 0.00 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 \\ 0.25 & 0.43 & 0.87 \end{bmatrix}$$

$$\neq R_Z(30^0)R_X(30^0) = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.25 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.50 & 0.87 \end{bmatrix}$$

Lưu ý :
Trình tự quay theo các trục ….

GÓC ROLL-PITCH-YAW (RPY)- phép quay Euler.

- Quay {B} quanh $\hat{X}_A$ một góc γ (roll)
- Sau đó quay quanh $\hat{Y}_A$ một góc β (pitch)
- Sau đó quay quanh $\hat{Z}_A$ một góc α (yaw)



GÓC ROLL-PITCH-YAW (RPY)- phép quay Euler.

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & (c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma) & (s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta c\gamma) \\ s\alpha c\beta & (c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma) & (s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma) \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

PHÉP QUAY QUANH TRỤC BẤT KỲ

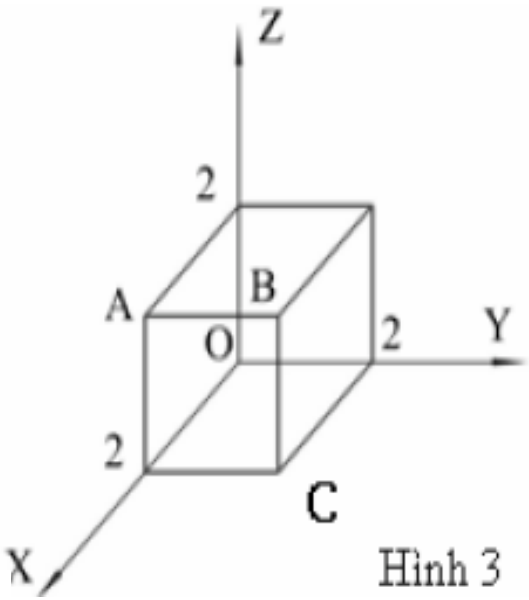
Trục có **vector đơn vị** của trục quay bất kỳ : $r(r_x, r_y, r_z)$, phép quay quanh trục này một góc υ , ma trận quay lúc đó là:

$$\begin{bmatrix} r_x^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta & r_x r_y(1-\cos\vartheta)-r_z\sin\vartheta & r_x r_z(1-\cos\vartheta)+r_y\sin\vartheta & 0 \\ r_x r_y(1-\cos\vartheta)+r_z\sin\vartheta & r_y^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta & r_y r_z(1-\cos\vartheta)-r_x\sin\vartheta & 0 \\ r_x r_z(1-\cos\vartheta)-r_y\sin\vartheta & r_y r_z(1-\cos\vartheta)+r_x\sin\vartheta & r_z^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG CHUYỂN ĐỔI TỌA ĐỘ

Bài 4:

Cho điểm P biểu diễn bởi vectơ ${}^{A}\mathbf{p} = [2 \quad 4 \quad 1]^{T}$. Tịnh tiến điểm P theo vectơ $h = [1 \quad 2 \quad 1]^{T}$, sau đó cho điểm P quanh trục X của hệ tọa độ {A} một góc 90^{0}. Xác định véc-tơ biểu diễn vị trí điểm P sau 2 bước dịch chuyển.



Hình 3

$$
{}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{T}_{B}\,{}^{B}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{R}_{B}\,{}^{B}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

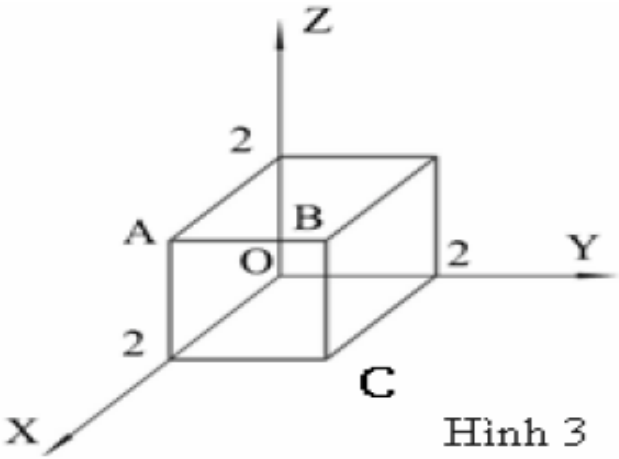
MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG CHUYỂN ĐỔI TỌA ĐỘ

Bài 5:

Cho một khối lập phương trong hệ tọa độ OXYZ cố định như hình 3. Khối này được quay quanh trục OB một góc 90^0. Xác định véc-tơ biểu diễn vị trí điểm A (một đỉnh của khối lập phương) sau khi thực hiện phép quay.

$$^{A}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$^{A}\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$



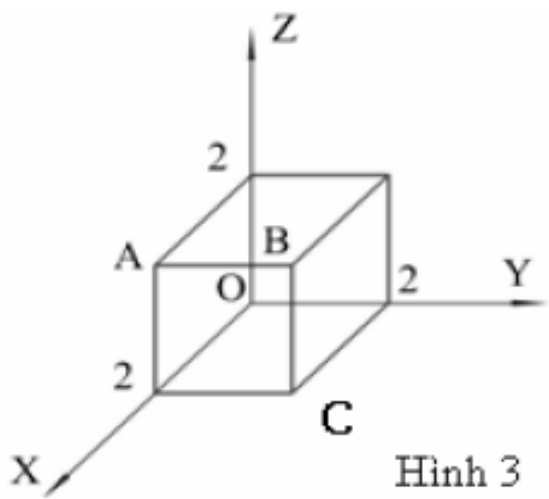
Hình 3

$$^{A}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.2440 & 0.9107 & 0 \\ 0.9107 & 0.3333 & -0.2440 & 0 \\ -0.2440 & 0.9107 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.488 \\ 1.333 \\ 0.1786 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG CHUYỂN ĐỔI TỌA ĐỘ

Cho một khối lập phương trong hệ tọa độ OXYZ cố định như hình 3. Tịnh tiến khối lập phương theo véc-tơ $h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ sau đó quay khối lập phương quanh trục OZ một góc 90^0 (lưu ý: hướng của khối lập phương cũng sẽ bị thay đổi khi quay). Xác định véc-tơ biểu diễn vị trí điểm A (một đỉnh của khối lập phương) sau khi thực hiện 2 phép biến đổi.

$$^{A}\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{T}_{B}\,{}^{B}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Hình 3

$$^{A}\mathbf{p} = {}^{A}\mathbf{R}_{B}\,{}^{B}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

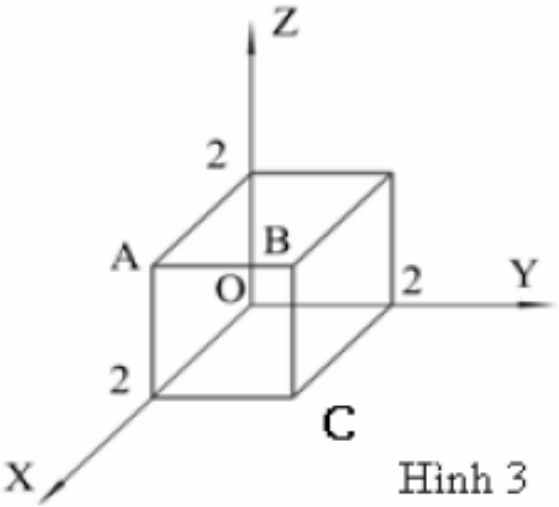
MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG CHUYỂN ĐỔI TỌA ĐỘ

Bài 7:

Cho một khối lập phương trong hệ tọa độ OXYZ cố định như hình 3. Quay khối lập phương quanh trục OZ một góc 90^0 sau đó quay tiếp quanh trục OX một góc -90^0. Xác định véc-tơ biểu diễn vị trí điểm A (một đỉnh của khối lập phương) sau khi thực hiện 2 phép biến đổi.

Bài 8:

Cho một khối lập phương trong hệ tọa độ OXYZ cố định như hình 3. Quay khối lập phương quanh trục OZ một góc 45^0 sau đó quay tiếp quanh véc-tơ AB (là 1 cạnh của khối lập phương) một góc -90^0. Xác định véc-tơ biểu diễn vị trí điểm C (một đỉnh của khối lập phương) sau khi thực hiện 2 phép biến đổi.



Hình 3

THE END OF CHAPTER 3.