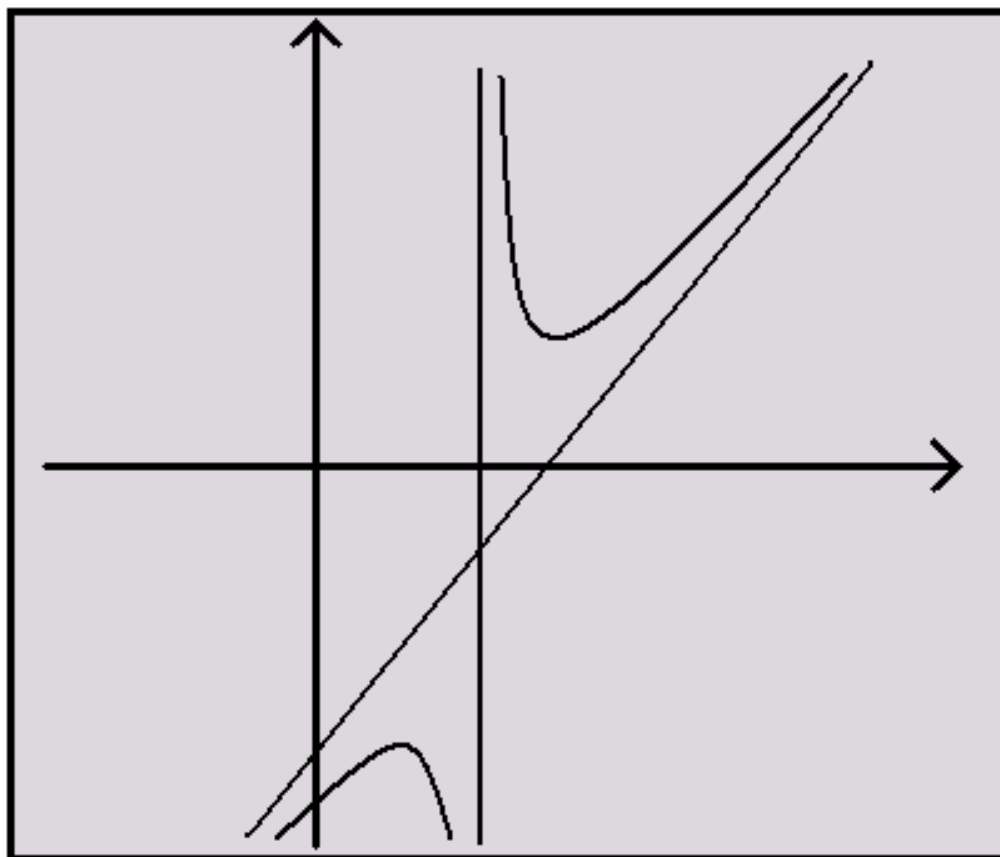


NGUYỄN ĐỨC TUẤN



TỰ ÔN LUYỆN THI

MÔN TOÁN

Hà nội, 1 - 2005

Chương 1: Phương trình và bất phương trình

Bài 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

I. Cách giải

1) Phương trình bậc nhất: $ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}.$

- Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}.$
- Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a = b = 0$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}.$

2) Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$

- Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$
- Nếu $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$

II. Định lý Viét và hệ quả về dấu các nghiệm

1) Định lý Viét: Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

2) Hệ quả: Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ có hai nghiệm:

$$\text{Trái dấu} \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \qquad \text{Cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Cùng dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \qquad \text{Cùng âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

III. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ta có

1. Định lý thuận:

- Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì $a.f(x) > 0$ với $\forall x.$
- Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) > 0$ với $\forall x \neq -\frac{b}{2a}.$
- Nếu $\Delta > 0$ khi đó $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và
 $a.f(x) > 0$ với x ngoài $[x_1; x_2].$
 $a.f(x) < 0$ với $x_1 < x < x_2.$

2. Định lý đảo: Nếu tồn tại số α sao cho $a.f(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt và số α nằm trong khoảng hai nghiệm đó: $x_1 < \alpha < x_2.$

IV. Ứng dụng

1. Điều kiện để $f(x) = ax^2 + bx + c$ không đổi dấu với mọi x

$$f(x) > 0 \text{ với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c > 0 \\ a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad f(x) \geq 0 \text{ với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \\ a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0 \text{ với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c < 0 \\ a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad f(x) \leq 0 \text{ với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \\ a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

2. So sánh nghiệm tam thức bậc hai với số thực α

- Điều kiện để $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt và $x_1 < \alpha < x_2$ là: $a.f(\alpha) < 0$.
- Điều kiện để $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt và α nằm ngoài khoảng hai nghiệm:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{- Nếu } \alpha \text{ nằm bên phải hai nghiệm: } x_1 < x_2 < \alpha &\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Nếu } \alpha \text{ nằm bên trái hai nghiệm: } \alpha < x_1 < x_2 &\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} > \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

- Điều kiện để $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt và một nghiệm nằm trong, một nghiệm nằm ngoài đoạn $[\alpha; \beta]$ là: $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

3. Điều kiện để $f(x)$ có nghiệm thỏa mãn $x > \alpha$:

- Trường hợp 1: $f(x)$ có nghiệm $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$.

$$\bullet \text{ Trường hợp 2: } f(x) \text{ có nghiệm } \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Trường hợp 3: } f(x) \text{ có nghiệm } \alpha = x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} \end{cases}$$

(Làm tương tự với trường hợp $x < \alpha$ và khi xảy ra dấu bằng)

Ngoài ra ta chú ý thêm định lý sau: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục. Khi đó điều kiện để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm là $\min f(x) \leq m \leq \max f(x)$.

Bảng tóm tắt định lý thuận về dấu của tam thức bậc hai

Nếu $\Delta < 0$		Nếu $\Delta = 0$		Nếu $\Delta > 0$	
$a.f(x) > 0$ với $\forall x$		$a.f(x) > 0$ với $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$		$a.f(x) > 0$ với x ngoài $[x_1; x_2]$ $a.f(x) < 0$ với $x_1 < x < x_2$	

Bảng tóm tắt so sánh nghiệm tam thức bậc hai với số thực α

Điều kiện để $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt và

α nằm giữa khoảng hai nghiệm $x_1 < \alpha < x_2$	α nằm ngoài khoảng hai nghiệm	
$a.f(\alpha) < 0$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}$	
	$x_1 < x_2 < \alpha$	$x_1 < x_2 < \alpha$
	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} < a \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} > a \end{cases}$

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+4)x + m^2 + 8 = 0$ có 2 nghiệm dương.

Ví dụ 2. Xác định a để biểu thức $(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3$ luôn dương

Ví dụ 3. Tìm m để bất phương trình $x^2 + x - 2 \geq m$ nghiệm đúng với mọi x .

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $x^2 + mx + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn
 $-1 < x_1 < x_2$

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 2m^2 - 1 = 0$ có nghiệm thỏa mãn
 $-2 \leq x_1 \leq x_2 \leq 4$

Ví dụ 6. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 3m - 2 = 0$
Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2

Ví dụ 7. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có nghiệm lớn hơn 1

Ví dụ 8. Tìm m để phương trình $x^2 - 6mx + 9m^2 - 2m + 2 = 0$ có nghiệm $x_1 \leq x_2 \leq 3$

Bài 2: PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ phương trình (1) trở thành: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

- PT (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có ít nhất một nghiệm không âm.
- PT (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có đúng một nghiệm dương.
- PT (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.
- PT (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 1. Cho phương trình: $x^4 + (1-2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$.

a) Tìm các giá trị của m để phương trình vô nghiệm.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Tìm m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8$

cắt trục hoành lần lượt tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D với $AB = BC = CD$.

II. Phương trình chứa giá trị tuyệt đối

1) Các dạng cơ bản:

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases} \quad |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a^2 \leq b^2 \end{cases} \quad |a| \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b \geq 0 \\ a^2 \geq b^2 \end{cases}$$

$$|a| \geq |b| \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$$

Ví dụ 1. Giải phương trình $|x^2 - 3x + 2| - 2x = 1$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $x^2 - |4x - 5| < 0$.

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình $|2x - m| = x$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $4|\sin x| + 2\cos 2x = 3$.

Ví dụ 5. Giải và biện luận bất phương trình $|3x^2 - 3x - m| \leq |x^2 - 4x + m|$.

2) Phương pháp đồ thị:

a) Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ khi đã biết đồ thị hàm số $y = f(x)$.

- Chia đồ thị hàm số $f(x)$ ra 2 phần: phần đồ thị nằm phía trên trục hoành (1) và phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành (2).

- Vẽ phần đồ thị đối xứng với phần đồ thị (2) qua trục hoành được phần đồ thị (3).

- Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là đồ thị gồm phần đồ thị (1) và phần đồ thị (3) vừa vẽ.

b) Định lí: Số nghiệm của phương trình $g(x) = h(m)$ là số giao điểm của đường thẳng nằm ngang $y = h(m)$ với đồ thị hàm số $y = g(x)$. Khi gặp phương trình có tham số ta tách riêng chúng về một vế của phương trình rồi vẽ đồ thị hàm số $y = g(x)$ và đường thẳng $y = h(m)$ rồi áp dụng định lí trên để biện luận.

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình $|x^2 - 1| = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 7. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x - 1| + |x + 2| = m$.

Bài 3: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

I. Các dạng cơ bản

Dạng 1: $\sqrt[n+1]{f(x)} = \varphi(x), n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f(x) = [\varphi(x)]^{2n+1}$

Dạng 2: $\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x), n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) = [\varphi(x)]^{2n} \end{cases}$

Dạng 3:

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < [\varphi(x)]^2 \end{cases}, \quad \sqrt{f(x)} \leq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [\varphi(x)]^2 \end{cases}$$

Dạng 4:

$$\sqrt{f(x)} > \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) > [\varphi(x)]^2 \end{cases}, \quad \sqrt{f(x)} \geq \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [\varphi(x)]^2 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2x + 1$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} > 2 - x$

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình có nghiệm $x - m = \sqrt{2x^2 + mx - 3}$

II. Các phương pháp giải phương trình, bất phương trình vô tỷ không cơ bản

1) Phương pháp lũy thừa hai vế:

- Đặt điều kiện trước khi biến đổi
- Chỉ được bình phương hai vế của một phương trình để được phương trình tương đương (hay bình phương hai vế của một bất phương trình và giữ nguyên chiều) **nếu** hai vế của chúng không âm.

- Chú ý các phép biến đổi căn thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{x+4}$

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $3\sqrt{x} - \sqrt{5x+5} > 1$

Ví dụ 8. Giải bất phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x}$

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$

Ví dụ 10. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$

2) Phương pháp đặt ẩn phụ:

- Những bài toán có tham số khi đặt ẩn phụ phải tìm tập xác định của ẩn mới.

- Chú ý các hằng đẳng thức $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, ...

Ví dụ 11. Giải bất phương trình $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - x^2 - 2x$

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4$

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 4x - 15 + 4\sqrt{x^2 - 4}$

Ví dụ 14. Giải phương trình $\sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\frac{3x^2 + 2x - 2}{x}}$

Ví dụ 15. Giải bất phương trình $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4$

Bài 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

I. Hệ phương trình đối xứng loại 1

1) Khái niệm: Là hệ mà mỗi phương trình không đổi khi ta thay x bởi y và thay y bởi x .

2) Tính chất: Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ.

3) Cách giải:

$$\text{Biến đổi hệ phương trình về dạng: Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=S \\ x.y=P \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - St + P = 0$ (2)

Nếu $\Delta = S^2 - 4P > 0$ thì phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 \neq t_2$ nên hệ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $(t_1, t_2), (t_2, t_1)$.

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (2) có nghiệm kép $t_1 = t_2$ nên hệ (1) có nghiệm duy nhất (t_1, t_2) .

Điều kiện để hệ (1) có ít nhất một cặp nghiệm (x, y) thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{cases} \Delta = S^2 - 4P \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-xy=3 \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$

Ví dụ 2. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=m \\ x+y=m^2-4m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+2)(y+2)=5m-6 \\ x^2+y^2+2(x+y)=2m \end{cases}$

II. Hệ phương trình đối xứng loại 2

1) Khái niệm: Là hệ phương trình mà trong hệ phương trình ta đổi vai trò x, y cho nhau thì phương trình nó trở thành phương trình kia.

2) Tính chất: Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ.

3) Cách giải:

Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được phương trình có dạng:

$$(x-y).f(x,y)=0 \Leftrightarrow x-y=0 \text{ hoặc } f(x,y)=0.$$

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2=40y \\ y^3+x^2y=40x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y-4=y^2 \\ xy^2-4=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=y+\frac{1}{y} \\ 2y^2=x+\frac{1}{x} \end{cases}$

Ví dụ 4. Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x+\sqrt{y-1}=m \\ 2y+\sqrt{x-1}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2-y+m \\ y=x^2-x+m \end{cases}$

Bài 5: MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH DẠNG KHÁC

I. Hệ vô tỷ

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = a \\ x - y = a \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}} = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{2 - y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{2 - x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 5. Tìm m để hệ có nghiệm
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

II. Hệ hữu tỷ

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22 \end{cases}$$

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$$

Ví dụ 9. Tìm a để hệ có nghiệm
$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ xy + x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$$

Ví dụ 11. Tìm m để hệ có hai nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11 \\ (x^2 - y^2)xy = 180 \end{cases}$$

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + y^3 = 7(x + y) \end{cases}$$

=====

Chương 2: Phương trình lượng giác, mũ, logarit

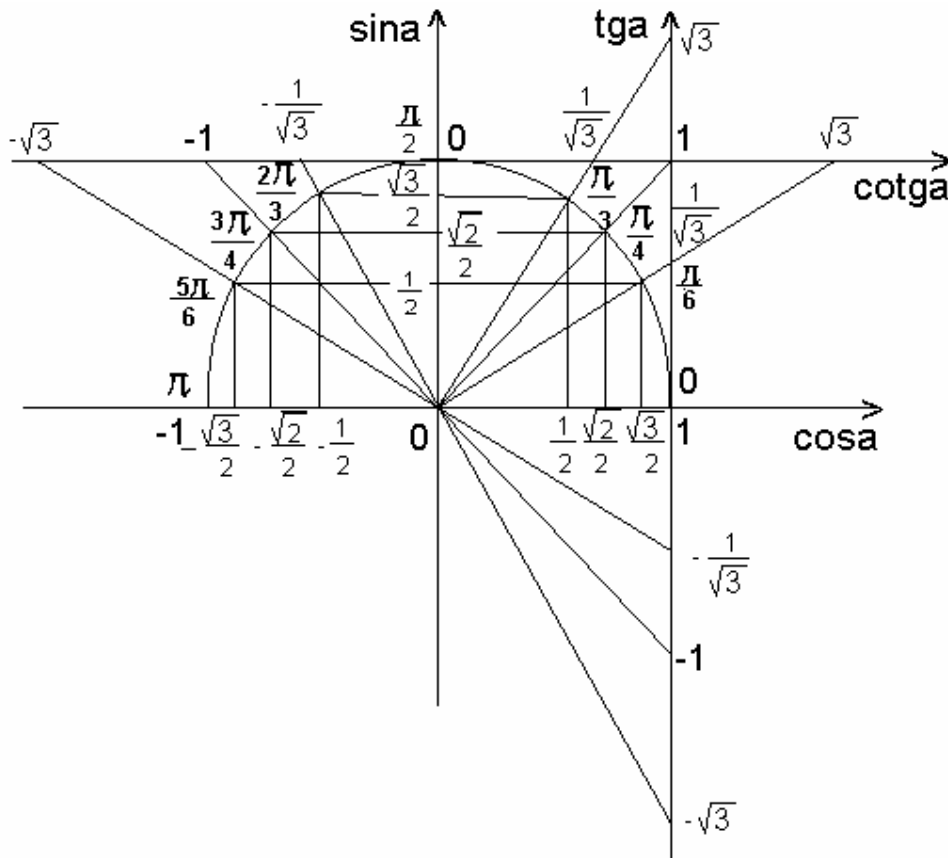
Bài 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. Phương trình lượng giác cơ bản

Khi giải các phương trình lượng giác cuối cùng dẫn đến phép giải các phương trình lượng giác cơ bản. Ta cần ghi nhớ bảng sau đây:

Phương trình	Điều kiện có nghiệm	Đưa về dạng	Nghiệm
$\sin x = m$	$-1 \leq m \leq 1$	$\sin x = \sin \alpha$	$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$
$\cos x = m$	$-1 \leq m \leq 1$	$\cos x = \cos \alpha$	$\pm \alpha + k2\pi$
$\operatorname{tg} x = m$	mọi m	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$	$\alpha + k\pi$
$\operatorname{cotg} x = m$	mọi m	$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha$	$\alpha + k\pi$

Ở bảng trên k nhận mọi giá trị nguyên ($k \in \mathbb{Z}$). Đơn vị góc thường dùng là radian. Để thuận lợi cho việc chọn α ta cần nhớ giá trị của hàm lượng giác tại các góc đặc biệt. Đường tròn lượng giác sẽ giúp ta nhớ một cách rõ ràng hơn.



Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$a) \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad b) \sin(2x - \frac{\pi}{5}) = 1; \quad c) \sin(x\pi) = 0.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$a) \cos 2x = \cos \frac{\pi}{5}; \quad b) \cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}); \quad c) \cos x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$\cos^2(\frac{\pi}{3} \cos x - \frac{8\pi}{3}) = 0.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình:

$$\cos(\pi \sin x) = \cos(3\pi \sin x)$$

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$\cos^2 x - \sin^2(\sqrt{2}x) = 1$$

II. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx: $a \sin x + b \cos x = c$ (1), $a^2 + b^2 \neq 0$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi.$$

$$\text{Khi đó phương trình lượng giác có dạng: } \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

$$\text{Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: } \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$\text{Khi đó tồn tại } \alpha \in [0; \pi] \text{ sao cho } \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ nên ta có:}$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \varphi \pm \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 6. Giải phương trình: $2\sin 4x + \sqrt{3} \sin x = \cos x$.

Ví dụ 7. Cho phương trình: $\sin x + m \cos x = 1$

a) Giải phương trình với $m = -\sqrt{3}$.

b) Tìm m để phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\sin^2 x = 1$

Ví dụ 9. Tìm α để phương trình sau có nghiệm $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3} \cos x + \sin(x + \alpha) = 2$$

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

Ví dụ 11. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos 2x - m \sin 2x = 2m - 1$$

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

Ví dụ 13. Giải phương trình: $\cos^2 4x - \cos x \cdot \cos 4x - \sin^2 x + \frac{1}{4} = 0$

III. Phương trình đẳng cấp, phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$

1) Phương trình đẳng cấp bậc cao đối với $\sin x$ và $\cos x$:

Khái niệm: Một phương trình sau khi biến đổi về $\cos x$, $\sin x$ mà ở tất cả các số hạng có tổng số mũ của $\cos x$ và của $\sin x$ hoặc đều là số tự nhiên chẵn hoặc đều là số tự nhiên lẻ thì phương trình đó được gọi là “đẳng cấp” đối với $\cos x$ và $\sin x$. Gọi k là số lớn nhất trong các tổng số mũ nói trên được gọi là bậc của phương trình.

Cách giải: - Xét trường hợp $\cos x = 0$ thử vào phương trình

- Khi $\cos x \neq 0$ chia hai vế phương trình cho $\cos^k x$ sau đó đặt ẩn phụ $t = \tan x$.

Ví dụ 14. Giải phương trình: $2\sin^3 x = \cos x$

Ví dụ 15. Giải phương trình: $\sin^3(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin x$

Ví dụ 16. Tìm m để phương trình có nghiệm:
 $m \sin 2x + \cos 2x + \sin^2 x + m = 0$.

Ví dụ 17: Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm x nằm trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:
 $3\sin^4 x - 2(m+2)\sin^2 x \cdot \cos^2 x + (1 - m^2)\cos 4x = 0$.

2) Phương trình đối xứng $\sin x$ và $\cos x$:

Khái niệm: Một phương trình sau khi biến đổi về $\cos x$, $\sin x$ mà các số hạng có chứa tổng ($\cos x \pm \sin x$) hoặc chứa tích $\cos x \cdot \sin x$ được gọi là phương trình đối xứng đối với $\cos x$ và $\sin x$. Ví dụ phương trình: $a(\cos x \pm \sin x) + b \cos x \cdot \sin x + c = 0$.

Cách giải: Đặt $t = \sin x + \cos x$, ta có $|t| \leq \sqrt{2}$. Khi đó: $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Nếu đặt $t = \sin x - \cos x$, ta có $|t| \leq \sqrt{2}$. Khi đó: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

Ví dụ 18. Cho phương trình: $\sin x \cdot \cos x = 6(\sin x + \cos x + m)$.

- Giải hệ phương trình với $m = -1$.
- Tìm m để phương trình có nghiệm.

Ví dụ 19. Giải phương trình: $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

Ví dụ 20. Giải phương trình: $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2} \sin 4x$

Ví dụ 21. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$:

$$\cos^3 x + \sin^3 x = m.$$

IV. Phương trình đưa về dạng tích

Các phương trình lượng giác không có dạng như những phương trình đã trình bày ở các mục trước, người ta thường nghĩ tới phân tích chúng thành những phương trình cơ bản.

Việc phân tích thành tích thực chất là đi tìm thừa số chung của các số hạng có trong phương trình. Để làm được điều đó, chúng ta cần phải thành thạo các công thức lượng giác, các hằng đẳng thức đại số đáng nhớ và cũng cần phải có kinh nghiệm nhìn nhận mối quan hệ giữa các số hạng có trong phương trình.

- Thử các nghiệm đặc biệt như $\sin x = \pm 1$, $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, $\cos x = \pm 1$, $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ và phương trình có chứa thừa số $(\cos x \pm \sin x)$. Sử dụng đẳng thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Dùng các công thức biến đổi như hạ bậc, biến đổi tổng thành tích, biến đổi tích thành tổng, hàm số lượng giác của hai góc có liên quan đặc biệt. Chú thêm một số biến đổi sau đây:

$$\cot gx + \tan gx = \frac{2}{\sin 2x}, \quad \cot gx - \tan gx = 2 \cot 2x, \quad \cot gx - \cot 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

- Đặt các nhân tử chung (nhân tử chung suy ra từ nghiệm đã thử được).
Tham khảo thêm bảng họ các biểu thức có nhân tử chung.

f(x)	Biểu thức chứa thừa số f(x)
$\sin x$	$\sin 2x, \tan x, \tan 2x, \dots$
$\cos x$	$\sin 2x, \tan 2x, \cot x, \dots$
$1 + \cos x$	$\cos^2 \frac{x}{2}, \cot^2 \frac{x}{2}, \sin^2 x, \tan^2 x$
$1 - \cos x$	$\sin^2 \frac{x}{2}, \tan^2 \frac{x}{2}, \sin^2 x, \tan^2 x$
$1 + \sin x$	$\cos^2 x, \cot^2 x, \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}), \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$
$1 - \sin x$	$\cos^2 x, \cot^2 x, \cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}), \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
$\sin x + \cos x$	$\cos 2x, \cot 2x, 1 + \sin 2x, 1 + \tan x, 1 + \cot x, \tan x - \cot x$
$\sin x - \cos x$	$\cos 2x, \cot 2x, 1 - \sin 2x, 1 - \tan x, 1 - \cot x, \tan x - \cot x$

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\cos 3x \cdot \cos 4x + \sin 2x \cdot \sin 5x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x)$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4(\sin x - \cos x)$

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 + \sin 2x$

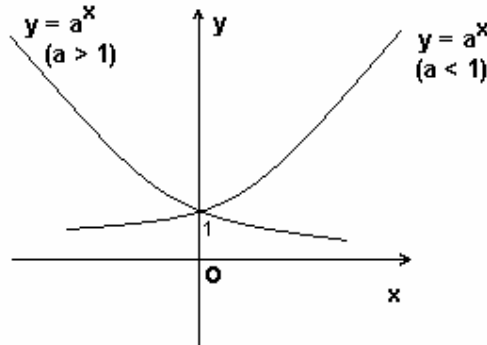
Ví dụ 7. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Bài 2: PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT

I. Các kết quả cơ bản

1) Hàm số mũ: $y = a^x$, $0 < a \neq 1$.

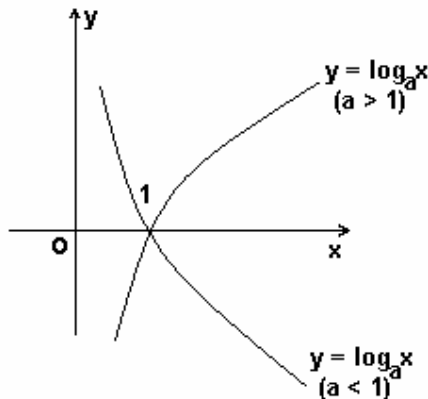
- Tập xác định: $\mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}^+$. (đồ thị luôn nằm phía trên trục hoành)
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến.
 Khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Dạng đồ thị:



2) Hàm số logarit: $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$.

a) Các tính chất:

- Tập xác định: $\mathbb{R}^+$ ($x > 0$).
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến.
 Khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Dạng đồ thị:



Chú ý: Trong các bất phương trình mũ, logarit, cơ số a lớn hơn hay bé hơn 1 quyết định chiều của bất phương trình. Vì vậy phải chú ý đến chiều của bất phương trình trong quá trình biến đổi.

b) Các công thức chú ý:

- $\log_a b$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (Công thức đổi cơ số với $b > 0$, $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$).
- $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ (Với $b > 0$ và $0 < a \neq 1$)
- $\log_a b^{2k} = 2k \cdot \log_a |b|$ với $k \in \mathbb{Z}$.

II. Các phương trình, bất phương trình có dạng cơ bản

1) Phương trình mũ:

Cho $0 < a \neq 1$.

Dạng 1: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

Dạng 2: $a^{f(x)} < b$ (với $b > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$

Dạng 3: $a^{f(x)} > b$

- Nếu $b \leq 0$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định của bất phương trình.

- Nếu $b > 0$, khi đó bất phương trình tương đương với: $\begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases}$

Dạng 4: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

2) Phương trình logarit

Dạng 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

Dạng 2: $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$

Dạng 3: $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$

Dạng 4: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho phương trình: $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$

a) Giải phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình: $\log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2$

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $\log_2(9^x + 9m^3) = x$

Ví dụ 4. Giải phương trình:

$$\log_x (\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}} (\cos x + \cos 2x) = 0$$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình: $\log_x [\log_3 (9^x - 72)] \leq 1$

Ví dụ 6. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{5-x}) < \log_{\frac{1}{3}} (3-x)$

III. Các phương trình, bất phương trình không cơ bản

- Phải đặt điều kiện.
- Những bài toán có tham số, đặt ẩn phụ phải tìm tập xác định của ẩn mới.
- Những bài toán phương trình, bất phương trình mũ, logarit mà ẩn x vừa ở số mũ của lũy thừa, vừa ở hệ số, thường chuyển về việc phân tích thành thừa số, nhằm nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất đối với phương trình; xét dấu của tích đối với bất phương trình.
- Khi bài toán phức tạp, có những phần tử giống nhau hay nhân tử giống nhau ta có thể đặt ẩn phụ để đưa bài toán trở lên đơn giản hơn.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $3.4^x + \frac{1}{3}9^{x+2} = 6.4^{x+1} - \frac{1}{4}9^{x+1}$

Ví dụ 8. Giải phương trình: $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$

Ví dụ 9. Giải bất phương trình: $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$ (với $0 < a \neq 1$).

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\log_{27}(x^2 - 5x + 6)^3 = \log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \log_9(x-3)^2$

Ví dụ 11. Giải phương trình: $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$

Ví dụ 12. Giải phương trình:

$$x^2 \cdot \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \cdot \log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$$

Ví dụ 13. Giải bất phương trình: $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

Ví dụ 14. Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$

Ví dụ 15. Giải phương trình: $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25$

Ví dụ 16. Giải phương trình: $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

Ví dụ 17. Tìm m để phương trình sau đây có hai nghiệm trái dấu:

$$(m+3)16^x + (2m-4)4^x + m+1 = 0$$

Chương 3: Khảo sát hàm số và các bài toán liên quan

Bài 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ

Sơ đồ khảo sát hàm số

- 1) Tìm tập xác định của hàm số (Xét tính chẵn lẻ, tính tuần hoàn (nếu có)).
- 2) Khảo sát sự biến thiên hàm số
 - a) Xét chiều biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm
 - Tìm các điểm tới hạn
(Điểm tới hạn thuộc TXĐ và tại đó $f'(x)$ không xác định hoặc bằng 0)
 - Xét dấu của đạo hàm trong các khoảng xác định bởi các điểm tới hạn.
(Giữa hai điểm tới hạn kề nhau thì $f'(x)$ giữ nguyên một dấu)
 - Suy ra chiều biến thiên hàm số trong mỗi khoảng
(Đồng biến nếu $f'(x) > 0$, nghịch biến nếu $f'(x) < 0$).
 - b) Tính các cực trị (suy ra ngay từ phần xét chiều biến thiên)
 - c) Tìm các giới hạn của hàm số
 - Khi x dần tới vô cực ($x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$)
 - Khi x dần tới bên trái và bên phải, các giá trị của x tại đó hàm số không xác định ($x \rightarrow +x_0$, $x \rightarrow -x_0$)
 - Tìm tiệm cận (nếu là hàm số phân thức)
 - Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ thì $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của hàm số
 - Tiệm cận xiên: $y = ax + b$. Trong đó $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$
(khi $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), $x \rightarrow +x_0$ ($x \rightarrow -x_0$) thì đó là tiệm cận bên phải (trái))
 - d) Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn của đồ thị hàm số (nếu là hàm số đa thức)
 - Tính đạo hàm cấp 2
 - Xét dấu của đạo hàm cấp 2
 - Suy ra tính lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị (lập bảng lồi lõm)
(nếu $f''(x) < 0$ với $\forall x \in (a; b)$ thì đồ thị hàm số lồi trên khoảng đó)
 - e) Lập bảng biến thiên (ghi tất cả các kết quả tìm được vào bảng biến thiên)
- 3) Vẽ đồ thị
 - Chính xác hóa đồ thị (tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ và nên lấy thêm một số điểm của đồ thị, nên vẽ tiếp tuyến ở một số điểm đặc biệt)
 - Vẽ đồ thị (đọc lại các ví dụ mẫu SGK từ trang 80 đến trang 97).

BÀI 2: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

I. Tìm giao điểm của hai đường

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_1) . Rõ ràng $M_0(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C) và (C_1) khi và chỉ khi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Do đó để tìm hoành độ các giao điểm của (C) và (C_1) ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của hai đồ thị (C) và (C_1) .

Nếu $x_0, x_1, \dots$ là các nghiệm của (1) thì các điểm $M_0(x_0; f(x_0)), M_1(x_1; f(x_1)) \dots$ là các giao điểm của (C) và (C_1) .

Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng tại một số điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1. Biện luận theo m số giao điểm của đồ thị các hàm số

$$y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x + 2} \quad \text{và} \quad y = x - m$$

Ví dụ 2. Biện luận số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$

Ví dụ 3. Với giá trị nào của k thì đường thẳng $y = kx - k + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 4. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 1$ cắt đồ thị $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$ tại hai điểm phân biệt

Ví dụ 5. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt

Ví dụ 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Ví dụ 7. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$ tại hai điểm A và B

sao cho độ dài đoạn $AB = 1$.

Ví dụ 8. Tìm m để đồ thị $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại 3 điểm phân biệt.

Ví dụ 9. Tìm m để đồ thị $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Ví dụ 10. Tìm a để đường thẳng $y = a(x + 1) + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$ tại hai điểm có hoành độ trái dấu.

II. Viết phương trình tiếp tuyến

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C)

a) Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

b) Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_1(x_1; y_1)$ và tiếp xúc với (C)

Đường thẳng d đi qua $M_1(x_1; y_1)$ có dạng $y - y_1 = k(x - x_1) \Leftrightarrow y = k(x - x_1) + y_1$

Để cho đường thẳng d tiếp xúc với (C), hệ phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} y = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Hệ phương trình này cho phép xác định hoành độ x_0 của tiếp điểm và hệ số góc $k = f'(x)$

Chú ý: Hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau nếu và chỉ nếu hệ phương trình sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

c) Phương trình đường thẳng có hệ số góc k và tiếp xúc (C).

Phương trình đường thẳng có hệ số góc k có dạng $y = kx + b$ tiếp xúc với đồ thị (C), ta giải phương trình $f'(x) = k$ tìm được hoành độ các tiếp điểm $x_0, x_1, x_2, \dots$. Từ đó suy ra phương trình các tiếp tuyến phải tìm:

$$y - y_i = k(x - x_i) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Bài toán : Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số khi biết phương của tiếp tuyến hoặc đi qua một điểm cho trước nào đó.

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = (2 - x^2)^2$ biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0; 4)$

Ví dụ 2. Viết phương trình các đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{4}x + 3$ và tiếp xúc

với đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -9x + 1$

Ví dụ 4. Từ gốc tọa độ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \quad \text{Viết phương trình các tiếp tuyến đó.}$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị là (C)

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại các điểm uốn.
- Tìm tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(0; \frac{3}{2})$

Ví dụ 6. Cho hàm số

$$y = \frac{3x+2}{x+2} \text{ có đồ thị là (C).}$$

Chứng minh rằng, không có tiếp tuyến nào của đồ thị (C) đi qua giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị đó.

Ví dụ 7. Cho hàm số

$$y = x - \frac{1}{x+1} \text{ có đồ thị là (C)}$$

Chứng minh rằng trên (C) tồn tại những cặp điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Ví dụ 8. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + mx - 2m - 4}{x + 2} \text{ có đồ thị (C)}$$

Giả sử tiếp tuyến tại $M \in (C)$ cắt hai tiệm cận tại P và Q. Chứng minh rằng $MP=MQ$

Ví dụ 9. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;1)$.

Ví dụ 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ có đồ thị là (C)

Tìm tất cả các điểm trên trục tung mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C)

Ví dụ 12. Tìm a để đồ thị $y = \frac{x^2 + 3x + a}{x + 1}$ có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x$.

Ví dụ 13. Tìm m để đồ thị $y = 2mx^3 - (4m^2 + 1)x^2 + 4m^2$ tiếp xúc với trục hoành.

Ví dụ 14. Tìm m để đồ thị $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$ tiếp xúc với đường thẳng $y = m$.

Ví dụ 15. Tìm a để tiệm cận xiên của đồ thị

$$y = \frac{2x^2 + (a+1)x - 3}{x + a}$$

tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 5$.

III. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in (a;b)$

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in (a;b)$

Bài toán : Yêu cầu tìm m để cho hàm số đồng biến, nghịch biến trong một khoảng nào đó

Chú ý: Cần nắm vững các định lý về dấu của tam thức bậc hai

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$

Xác định m sao cho hàm số đồng biến trên tập xác định.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$

Xác định m sao cho hàm số đồng biến trong khoảng $(-1;+\infty)$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$

Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(-1,1)$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + 2}{x+1}$

Tìm m để hàm số đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$

Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$

Tìm m để hàm số đồng biến trên $(3,+\infty)$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3m(m-2)x + 1$

Tìm m để hàm số đồng biến trên tập hợp các giá trị của x sao cho $1 \leq |x| \leq 2$

IV. Cực đại và cực tiểu

Cho hàm số $y = f(x)$, x_0 thuộc tập xác định của hàm số. Nếu khi x đi qua x_0 đạo hàm đổi dấu thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số.

- o Nếu đổi dấu từ + sang - thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- o Nếu đổi dấu từ - sang + thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Để tìm các điểm cực trị của hàm số ta có hai quy tắc:

- o Tìm các điểm tới hạn sau đó xét dấu của đạo hàm $f'(x)$
- o Giải phương trình $f'(x) = 0$. Gọi x_i là các nghiệm. Xét dấu của $f''(x)$

Bài toán : Tìm m để hàm số $y = f(x)$ có cực trị và các điểm cực trị thỏa mãn điều kiện nào đó.

- Tìm điều kiện m để cho đạo hàm của hàm số có đổi dấu (số lần đổi dấu bằng số cực trị)
- Tìm tọa độ của các điểm cực trị rồi đặt tiếp điều kiện của m để thỏa mãn điều kiện mà bài toán yêu cầu.

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx + m$

Với giá trị nào của m , hàm số có cực đại và cực tiểu.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x^2 + 2}$ luôn có một cực đại và một cực tiểu.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$

Xác định m sao cho hàm số có một cực đại và một cực tiểu. Tính tọa độ của điểm cực tiểu.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$

Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2m + 1}{mx + 1}$

Xác định m sao cho hàm số có cực trị và tiệm cận xiên của đồ thị đi qua gốc tọa độ.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2m - 4}{x + 2}$

Xác định m để hàm số có hai cực trị.

Ví dụ 8. Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$

Xác định m sao cho hàm số có cực trị trong khoảng $(-1, +\infty)$

Ví dụ 10. Xác định m sao cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (2 - 4m)x + 4m - 1}{x - 1}$$

Có cực trị trong miền $x > 0$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x + m}$.

Tìm m để hàm số không có cực trị.

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2m - 3)x + 4$.

Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm ở hai phía trục tung.

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + m}{x + 1}$.

Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm ở hai phía trục tung

Ví dụ 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + (2m + 3)x + m^2 + 4m}{x + m}$ có hai

cực trị và giá trị của điểm cực trị tương ứng trái dấu nhau.

Ví dụ 15. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m + 1)x - m + 1}{x - m}$ có hai cực trị và giá trị của điểm cực trị tương

ứng cùng dấu nhau.

