---

*Tập tài liệu này do tôi biên soạn cho các SV của mình, **chỉ lưu hành nội bộ và không có mục đích thương mại**. Ngoài các bài tập tôi biên soạn, một số khác tham khảo từ các tài liệu sau:*

*1) Liasko, Boiatruc, Gai, Golobac, **Giải tích toán học. Các ví dụ và các bài toán.***
*2) Demidovich, **Problems in mathematical analysis.***
*3)Mendelson, **3000 solved problems in Caculus.***
*4) N.Đ.Trí, T.V.Đỉnh, N.H.Quỳnh, **Bài tập toán cao cấp.***
*5) Đ.C.Khanh, N.M.Hằng, N.T.Lương, **Bài tập toán cao cấp.***

CHƯƠNG 1: HÀM NHIỀU BIẾN

I. TẬP TRONG $\mathbf{R}^n$, GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC.

● Ta có $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L \quad\Leftrightarrow\quad$ với mọi dãy $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x_0,y_0)$ thì $f(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}L$

vậy

+ Để tính $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ ta xét một dãy $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x_0,y_0)$ **tùy ý** và kiểm tra luôn có

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)=L$$

+ Để chứng minh $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ ta chỉ ra hai dãy $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x_0,y_0)$,

$(x'_n,y'_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x_0,y_0)$ mà $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)\neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n,y'_n)$

● ***Với một số giới hạn bằng 0, ta có thể dùng giới hạn kẹp.***

<u>Ví dụ:</u> Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{e^y-1}$

Xét một dãy $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$ tùy ý ($\Leftrightarrow \quad x_n\xrightarrow{n\to\infty}0,\ y_n\xrightarrow{n\to\infty}0$).

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin x_n y_n}{e^{y_n}-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x_n y_n}{x_n y_n}\right)\left(\dfrac{y_n}{e^{y_n}-1}\right)x_n=1.1.0=0$. Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{e^y-1}=0$.

<u>Ví dụ:</u> Khảo sát tính liên tục của $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0)\\[2mm] \dfrac{1}{2} & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ tại (0,0).

Ta kiểm tra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4}=\dfrac{1}{2}$ (?).

Ta xét dãy $(x_n,y_n)=(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n})\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$, ta có $\dfrac{x_n y_n^3}{x_n^4+y_n^4}\overset{\forall n}{=}\dfrac{2}{17}\xrightarrow{n\to\infty}\dfrac{2}{17}$

Tức $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4}\neq\dfrac{1}{2}$, hay $f(x,y)$ gián đoạn tại (0,0).

1.1. Tìm và biểu diễn hình học tập xác định của các hàm sau trên các không gian tương ứng

a) $f(x,y)=\sqrt{2y-x^2-y^2}+\ln(2-x-y)$ b) $f(x,y)=\sqrt[4]{y(x^2-y)}+\ln(2x-x^2-y^2)$

c) $f(x,y)=\arcsin(x-y)+\arccos(x+y)$ d) $f(x,y,z)=\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}+\ln(z-x^2-y^2)$

1.2. Viết phương trình mặt trụ

a) Qua giao tuyến 2 mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$ và có phương song song với Oz.

b) Qua giao tuyến 2 mặt $y=x^2+z^2$, $x+y+z=1$ và có phương song song với Oy.

1.3. Cho hàm $f(x,y,z)=x^2+xy+yz^2$. Tính

a) f(1,1,2) b) f(z,x-z,y)

1.4. Khảo sát sự tồn tại của các giới hạn và tính (nếu có)

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x+y)}{1-\sqrt{1+x+y}}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{x+y}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ f) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to1}}\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$

<u>HD:</u> a,f : tồn tại,dùng định nghĩa
c,e : tồn tại, dùng giới hạn kẹp
b,d : không tồn tại

1.5. Khảo sát tính liên tục của hàm số tại (0,0)

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

<u>HD:</u> a) gián đoạn, b) liên tục (dùng giới hạn kẹp).

II. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN.

1.6. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm số sau

a) $f(x,y)=\sin\left(xy^2\right)$ b) $f(x,y,z)=\dfrac{1+xy^2}{1+xz}$

1.7. Dùng định nghĩa chỉ ra các hàm sau không có đạo hàm riêng tại (0,0)

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\sqrt[3]{x+\sin y}$

<u>HD:</u> $f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$, $f_y^{'}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$.

1.8. Tính $f_x^{'}(0,0), f_y^{'}(0,0)$ với

a) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^4)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

<u>HD:</u> Phải dùng định nghĩa :

a) $\exists f_x^{'}(0,0)=0,\ f_y^{'}(0,0)=0$ b) $f_x^{'}(0,0)=1, \nexists f_y^{'}(0,0)$

1.9. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2),\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ biết $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{x^2+2y^2}e^{t^2}dt$

1.10. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2),\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ biết $f(x,y)=\displaystyle\int_{-x^2}^{x^2+y^2}\dfrac{\cos t}{t^2+1}dt$

<u>HD:</u> Sử dụng công thức $\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)_x^{'}=f(x), \left(\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)dt\right)_x^{'}=u'(x)f(u(x))$

1.11. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1),\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ biết $f(x,y)=\left(1+x^2+y^2\right)^{xy^2}$

<u>HD:</u> Sử dụng công thức đạo hàm riêng của hàm hợp $f=u^v$ với $u=1+x^2+y^2,\ v=xy^2$.

1.12. Tìm hàm $f(x,y)$ nếu biết rằng $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2-y$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}=y^2-x$.

<u>HD:</u> $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2-y\Rightarrow f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-yx+g(y)$, kết hợp giả thiết thứ hai.

1.13. Chứng minh hàm $f(x,y)=y\ln\left(x^2-y^2\right)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}.\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}.\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f}{y^2}$$

1.14. Chứng minh hàm $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ thỏa mãn phương trình

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^3}{y}.$$

1.15. Với giả thiết f, g là các hàm khả vi, chứng minh hàm $u=xf(x+y)+yg(x+y)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

1.16. Chứng minh rằng hàm $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ thỏa mãn phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

1.17. Tính vi phân toàn phần của các hàm sau

a) $f(x,y)=\ln\left(1+\sin\dfrac{x}{y}\right)$ b) $f(x,y,z)=(xy)^z$

1.18. Tính

a) $d^2 f$ với $f(x,y)=e^{x\sin y}$ b) $d^2 f\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ với $f(x,y)=\sin xy$

1.19. Tính $d^3 f$ nếu $f(x,y)=x^3+y^3+3xy(x-y)$.

1.20. Cho $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Chứng minh d^2u là xác định dương, tức

$$d^2u\ge 0,\ \forall dx,dy,dz \text{ và } d^2u=0\Leftrightarrow dx=dy=dz=0.$$

1.21. Dùng vi phân toàn phần tính gần đúng

a) $\ln\left((2{,}98)^2-(1{,}99)^3\right)$ b) $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$ c) $\sqrt{(1{,}02)^{1{,}99}+\ln(1{,}01)}$

d) $\ln\left(3\sqrt[4]{1{,}02}+2\sqrt[5]{0{,}99}-4\right)$ e) $(0{,}97)^{3{,}02}$ f) $\dfrac{\sin 1{,}49 \arctan 0{,}02}{2^{2{,}97}}$ với $\dfrac{\pi}{2}\approx 1{,}57$

<u>HD:</u> f) Xét hàm $f(x,y,z)=2^x\sin y\arctan z$.

1.22. Cho z là hàm ẩn của x,y xác định bởi $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-\frac{1}{z}$$

1.23. Tính vi phân cấp 1 của hàm ẩn z=z(x,y) xác định bởi các phương trình tương ứng

a) $z^3+2x^2z=x+y$ b) $x+y+z=e^{-(x+2y+3z)}$

1.24. Tính vi phân cấp 1 và cấp 2 của hàm ẩn z=z(x,y) xác định bởi các phương trình

$$\frac{x^2}{z} = \ln\left(\frac{z}{y}\right) + 2$$

1.25. Khai triển Taylor tới bậc hai với phần dư Peano của hàm $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ tại (2,1).

1.26. Khai triển Maclaurin tới bậc hai với phần dư Peano của hàm

a) $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$ b) $f(x,y) = \frac{x}{x+y+2}$.

1.27. Tìm đa thức xấp xỉ bậc 2 trong lân cận của (0,0) của các hàm số sau

a) $f(x,y) = e^{2x}\cos y$ b) $f(x,y) = \ln(1+2x)\sin y$

1.28. Cho hàm hai biến f(x,y) khả vi trên R^2 có các đạo hàm riêng bị chặn

$$\left|f_x(x,y)\right| \le M, \left|f_y(x,y)\right| \le M; \forall (x,y) \in R^2.$$

Chứng minh

$$\left|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\right| \le M\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right), \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R^2.$$

III. ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG, VECTƠ GRADIENT.

Xét hàm hai biến $f(x,y)$ tại $M(x_0,y_0)$.

● Véctơ gradient của f tại M là

$$\nabla f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

● Với hướng $\vec{u} = (a,b)$ thì

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M).\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(M).\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

hay

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M).\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M).\cos\beta$$

với $\alpha = (\vec{u}, Ox), \beta = (\vec{u}, Oy)$.

Ta có $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \vec{\nabla} f(M).\left(\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}\right)$

$$\max \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right| \Leftrightarrow \vec{u} = k\overrightarrow{\nabla f}(M)\ (k>0)$$

$$\min \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = -\left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right| \Leftrightarrow \vec{u} = k\overrightarrow{\nabla f}(M)\ (k<0).$$

Các khái niệm, kết quả trên cho hàm ba biến là hoàn toàn tương tự.

1.29. Tìm đạo hàm của $f(x,y)=2x^2-3y^3$ tại $P(1,0)$ theo hướng tạo với Ox một góc 120^0.

1.30. Tính đạo hàm của hàm số $z=x^2+xy+y^2$ tại $M(1,-1)$ theo hướng $\vec{v}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

1.31. Tính đạo hàm của hàm số $f(x,y,z)=x^3+y^3z$ tại $M(-1,2,1)$ theo hướng của $\vec{v}=(0,3,3)$.

1.32. Tính đạo hàm của hàm số $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tại $M_0(1,1,1)$ theo hướng của vectơ $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1(3,2,3)$.

1.33. Cho hàm số $z=xe^y$ và $M_0(2,0)$. Tìm hướng $\vec{u}$ để $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{u}}(M_0)$ lớn nhất, nhỏ nhất.

1.34. Cho hàm số $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}$ và $M_0(1,1,1)$. Tìm véctơ đơn vị $\vec{e}$ để $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0)$ lớn nhất, xác định giá trị lớn nhất đó.

1.35. Tính góc tạo bởi các vectơ gradient của $f(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ tại các điểm A(1,2,2) và B(-3,1,0).

1.36. Tìm điểm M(x,y) trong mặt phẳng Oxy để $\nabla f(M)=0$ với $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

1.37. Cho hàm số $f(x,y,z)=x^3+y^3-z$, tìm tốc độ thay đổi của f tại $M_0(1,1,2)$ dọc theo đường $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ theo hướng giảm của x.

1.38. Nếu nhiệt độ tại M(x,y,z) là $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$ và bạn đang ở vị trí (1/3,1/5,1/2), hướng nào bạn đi để nhiệt độ giảm nhanh nhất có thể?

<u>HD:</u> 1.37, 1.38: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M)$=tốc độ thay đổi của hàm f theo hướng $\vec{u}$ tại M.

CHƯƠNG 2: ỨNG DỤNG CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

I. CỰC TRỊ TỰ DO.

● Để tìm các điểm cực trị hàm hai biến ta chỉ cần tìm các điểm dừng (trong trường hợp hàm f có f'_x, f'_y) rồi tính $\Delta = f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$ tại các điểm dừng đó. Khi giải tọa độ điểm dừng phải chú ý tới miền xác định của f.

Trong trường hợp $\Delta = 0$ có thể đạt hoặc không đạt cực trị tại điểm dừng.

+ Để chỉ ra đạt cực trị ta có thể dùng bất đẳng thức

<u>Ví dụ:</u> Hàm $f(x,y) = x^4 + y^4$ có một điểm dừng duy nhất là $O(0,0)$ và tại đó $\Delta = 0$.

Ta có $f(x,y) \geq 0 = f(0,0), \forall (x,y)$,do đó với một lân cận tùy ý của O thì $f(O)$ sẽ nhỏ nhất trong lân cận đó, nói cách khác O là điểm CT của f.

+ Để chỉ ra không đạt cực trị tại $P(x_0, y_0)$ ta xét một $\varepsilon -$lân cận V tùy ý của P và chỉ ra trong V có hai điểm P_1, P_2 sao cho

$$f(P_1) < f(P) < f(P_2)$$

Thông thường ta hay chọn P_1, P_2 ở một trong các dạng

$$(x_0 \pm k, y_0), (x_0, y_0 \pm k), (x_0 \pm k, y_0 \pm k) \quad \text{với } k > 0 \text{ đủ bé.}$$

● Với hàm ba biến $f(x,y,z)$ ta kiểm tra điểm dừng có là điểm cực trị hay không bằng cách xét dấu $d^2 f$: dùng biến đổi Lagrange đưa về tổng bình phương hoặc dùng tiêu chuẩn Sylvester để xét dấu dạng toàn phương (nếu có định thức con chính bằng 0 thì phải xét trực tiếp $d^2 f$).

<u>Ví dụ:</u> Tìm cực trị của $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

Phương trình điểm dừng

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ f'_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

Suy ra f có 3 điểm dừng $O(0,0)$, $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $N(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Tại M, N thì f đạt cực trị vì $\Delta > 0$.

Tại O thì $\Delta = 0$, ta chỉ ra không đạt cực trị tại O. Xét V là một $\varepsilon -$lân cận tùy ý của O, với $0 < k < \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 2\right\}$ thì $P_1(k, -k), P_2(k,k) \in V$, nhưng ta có

$$f(P_1) = 2k^4 - 8k^2 = 2k^2(k^2 - 4) < 0 \ , \ f(O) = 0, \quad f(P_2) = 2k^4 > 0$$

Vậy $f(P_1) < f(O) < f(P_2)$, tức f không đạt lớn nhất hay nhỏ nhất tại O trong V mà V là lân cận chọn tùy ý, vậy f không đạt cực trị tại O.

2.1. Chứng minh hàm $f(x,y)=\sqrt[4]{x^4+y^2}$ không có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$ nhưng vẫn đạt cực trị tại đó.

<u>HD:</u> Dùng định nghĩa chỉ ra $\nexists f'_x(0,0), f'_y(0,0)$, dùng bđt để chỉ ra đạt CT tại (0,0).

2.2. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\quad (x>0, y>0)$

b) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$

c) $f(x,y)=x^4+y^4+4xy$

d) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}\ (x,y,z>0)$

2.3. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z=x^2+3y^2+xy-x+5y$

b) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3y^2-2xy-2yz$

c) $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$

d) $z=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{1}{y}$

f) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

g) $f(x,y)=(x-y)(1-xy)$

2.4. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z=x^3+y^3+x^2$

b) $z=x^3-3x^2+3x+3xy^2-3y^2+y^3$

<u>HD:</u> Đây là các bài có $\Delta=0$

b) $z'_x=3[(x-1)^2+y^2]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ và xét P_1, P_2 dạng $(1\pm k, 0)$ với $k>0$ đủ bé.

II. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

Để tìm cực trị có điều kiện của $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ xét hàm phụ Lagrange

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

Tìm điểm dừng $\begin{cases} L'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ L'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0. \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

Tại điểm dừng (x_0,y_0) ứng với λ_0, kiểm tra $d^2L=L''_{xx}dx^2+2L''_{xx}dxdy+L''_{yy}dy^2$ xác định dương hay xác định âm ta sẽ được (x_0,y_0) là điểm CĐ hay CT có điều kiện của $f(x,y)$.

Nếu chưa có ngay xác định dương hay âm ta chú ý ràng buộc của dx,dy tại (x_0,y_0) :

$$\varphi'_x(x_0,y_0)dx+\varphi'_y(x_0,y_0)dy=0.$$

Hàm ba biến hoàn toàn tương tự.

2.5. Tìm cực trị của

a) $f(x,y)=x+y$ với điều kiện $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad (a,b>0)$

b) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ với điều kiện $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\quad (a>0)$

c) $f(x,y)=x^2+12xy+2y^2$ với điều kiện $4x^2+y^2=25$

d) $f(x,y,z)=x-2y+2z$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$

2.6. Tìm hình chữ nhật có đường chéo bằng a cho trước mà có diện tích lớn nhất.

<u>HD:</u> Gọi độ dài hai cạnh kề nhau của hình chữ nhật là x, y thì điều kiện là $x^2 + y^2 = a^2$.

III. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.

Để tìm các min, max của f trên D ta chỉ cần tìm các điểm tới hạn (là các điểm dừng trong trường hợp có $f_x^{'}, f_y^{'}$) của f <u>***trong D***</u> và tìm các điểm min,max của f <u>***trên biên của D***</u> rồi so sánh các giá trị của f tại các điểm đó. ***Khi xét các điểm trên biên (thường là đường cong $\varphi(x,y)=0$) ta rút y theo x hoặc x theo y hoặc tham số hóa đường cong biên đưa f về một biến và tìm GTLN, GTNN như của hàm một biến thông thường.***

2.7. Tìm min,max của các hàm $z = f(x,y)$ trên các miền D tương ứng

a) $z = xy^2$ trên $D = \{(x,y) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}$

b) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ trên D giới hạn bởi các miền $x \le 1, y \le 1, x + y \ge 1$

c) $z = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$ trên $D = \{(x,y) : 0 \le x, y \le \dfrac{\pi}{4}\}$

d) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ trên $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$

e) $z = x^3 - y^3 - 3xy$ trên $D = \{-2 \le x \le 0, 0 \le y \le 2\}$

f) $z = x + y$ trên $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

g) $z = 2xy - x - y$ trên D giới hạn bởi các miền $y \ge 0, y \le x^2, x + y \le 2$

<u>HD:</u> a) Các điểm (x,y) trên biên $\partial D = \{(x,y) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ thỏa $y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4} \left(2 \le x \le 2\right)$

f) Các điểm (x,y) trên biên $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ có dạng

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

2.8. Trên mặt phẳng Oxy xét miền kín tam giác OAB xác định bởi các trục Ox, Oy và đường $x + y - 1 = 0$. Tìm các điểm $M(x,y)$ thuộc miền tam giác sao cho

a) Tổng các bình phương khoảng cách từ M tới ba đỉnh O, A, B là lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Tổng các khoảng cách từ M tới ba đỉnh O, A, B là lớn nhất, nhỏ nhất.

2.9. Tìm khoảng cách bé nhất của hai đường thẳng: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-7} = \dfrac{z+1}{1}$ và $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$.

<u>HD:</u> Viết pt hai đường thẳng ở dạng tham số rồi dùng công thức khoảng cách.

Chú ý nếu có $\Delta > 0$ và $f_{xx}^{"} > 0 (< 0); \forall (x,y)$ thì CT (CĐ) cũng chính là GTNN (GTLN).

IV. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC.

Để viết phương trình tiếp tuyến của của đường cong (C) là giao của hai mặt (S_1) và (S_2) tại $M \in (C)$, ta viết phương trình hai tiếp diện của hai mặt tại M, khi đó tiếp tuyến cần tìm là giao của hai tiếp diện vừa tìm được.

2.10. Viết phương trình của mặt phẳng tiếp diện với mặt $3xyz - z^3 = a^3$ tại điểm ứng với $x = 0, y = a$.

2.11. Viết phương trình tiếp diện của

a) Paraboloid elliptic $z = x^2 + y^2$ tại $(1,-2,5)$ b) Nón $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ tại (4,3,4).

2.12. Tìm tiếp diện của ellipxoit $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ song song với mặt phẳng x+y+z=1.

2.13. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

a) $x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \frac{\pi}{4}$.

b) $x = t, y = t^2, z = t^3$ tại điểm ứng với $t = 3$.

2.14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong giao bởi hai mặt $z = x^2 + y^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ tại M(1,0,1).

2.15. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong giao bởi hai mặt $x^2 + y^2 = 1$ và $z = x + y$ tại $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

2.16. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong giao bởi hai mặt $x^2 + y^2 = 10$ và $y^2 + z^2 = 10$ tại $M(1,1,3)$.

2.17. Chứng minh các mặt $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ và $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ tiếp xúc nhau tại $M(2,1,1)$.

<u>HD:</u> Chỉ ra hai mặt có cùng tiếp diện tại M.

2.18. Chứng minh tiếp diện của mặt $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2}$ tại một điểm tùy ý sẽ chắn các trục tọa độ bởi các đoạn có tổng độ dài bằng a.

CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

I. TÍCH PHÂN KÉP.

● Để tính tích phân kép ta dùng công thức Fubini đưa về tích phân lặp. Chú ý hai dạng miền của định lý Fubini, trong nhiều trường hợp khó tính theo dạng miền này nhưng lại đơn giản theo dạng miền kia.

● Có thể dùng đổi biến. Nếu miền lấy tích phân là hình tròn hoặc các hình liên quan tới hình tròn (hình vành khăn, hình quạt,…) ta dùng phép đổi biến tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Nếu hình tròn có tâm không tại gốc tọa độ ta có thể dời trục đưa gốc tọa độ về tâm hình tròn trước sau đó mới đổi biến tọa độ cực.

●Diện tích của miền kín D: $S(D) = \iint\limits_D dxdy$

3.1. Tính tích phân kép

a) $\int_2^3 dy \int_1^5 (x+2y)dx$ b) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} (x^2+y^2)dy$ c) $\int_1^2 dy \int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}\,dx$ d) $\int_0^1 dy \int_{y^4}^{y^2} \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx$

3.2. Tính tích phân kép của hàm đã cho trên miền D

a) $f(x,y) = \ln x.\sin y$ với $D: 1 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le \pi$.

b) $f(x,y) = 2x+1$ với $D: 0 \le x \le 2,\quad x^2 \le y \le 2x$.

c) $f(x,y) = xy$ với $D: 0 \le y \le 1,\quad y \le x \le \sqrt{y}$.

d) $f(x,y) = y\sqrt{x}$ với $D: x \ge 0,\quad y \ge x^2,\quad y \le 4 - x^2$.

e) $f(x,y) = y\sqrt{x}$ với $D: x \ge 0,\quad y \le 2 - x^2,\quad y \ge x$.

f) $f(x,y) = x^2 y$ với $D: x \ge 0,\quad x - y \le 0,\quad x + y \le 2$.

g) $f(x,y) = x - y$ với D giới hạn bởi các đường $y^2 = 3x$ và $y^2 = 4 - x$.

h) $f(x,y) = x + y$ với D giới hạn bởi các đường $y = 0, y = \sqrt{x},\quad x + y = 2$.

i) $f(x,y) = y^2$ với D giới hạn bởi các đường $y = 2x, y = 5x$ và $x = 2$.

j) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ với D là góc phần tư thứ nhất giới hạn bởi đường $x^2 = 4 - 2y$.

k) $f(x,y) = e^{x^3}$ với D giới hạn bởi các đường $y = x^2,\ x = 3$ và y=0.

3.3. Đổi thứ tự các tích phân kép sau

a) $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ b) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ c) $\int_0^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y)dx$ d) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dx$

3.4. Tính tích phân kép

a) $\iint\limits_D x\sin y\,dxdy$ với D là tam giác với các đỉnh $O(0,0)$, $A(0,\pi)$, $B(\pi,\pi)$.

b) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ với D là hình thang với các đỉnh $M(0,1)$, $N(1,0)$, $P(2,0)$ và $Q(3,1)$.

c) $\iint\limits_D xy^2dxdy$ với D là giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $4y=x^2$, $y=4$.

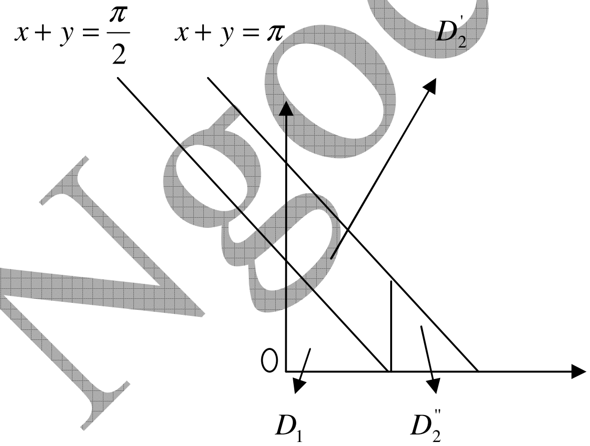
d) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$ với D là tam giác OAB với $O(0,0)$, $A(\pi,0)$, $B(0,\pi)$.

e) $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ với D là giới hạn bởi các đường $y=x$, $y=2-x^2$.

f) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}dx$

g) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ với D là giới hạn bởi các đường $y^2=x$, $x=0$, $y=1$.

<u>HD:</u> d) $D=D_1\cup D_2$: $D_1=\{(x,y):0\le x,y,\quad x+y\le\frac{\pi}{2}\}$, $D_2=D_2'\cup D_2''$



f) $D: 0\le y\le 2,\quad y/2\le x\le 1$. Đưa về dạng miền thứ nhất và đổi thứ tự tích phân.

g) Đưa về dạng miền thứ hai (hai trục ngang…).

3.5. Bằng phương pháp đổi biến tọa độ cực hãy tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$ với D là hình tròn $x^2+y^2\le 1$

b) $\iint\limits_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$ với D là miền giới hạn bởi hai đường $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$

c) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ với D : $x^2+y^2\le x$

d) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$ với D : $x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$.

e) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$ với D : $x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$.

f) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ với D : $1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ 0 \le, y \le x$.

g) $\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$ với D là miền giới hạn bởi ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

h) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$ với D: $x^2 + y^2 + 2x - 1 \le 0, \quad x^2 + y^2 + 2x \ge 0$.

<u>HD:</u> g) Đổi biến tọa độ cực mở rộng: $x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi$

h) Đổi trục rồi đổi biến tọa độ cực: $x = -1 + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

3.6. Bằng phương pháp đổi biến tổng quát cực hãy tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_D (x+y)^7(x-y)^4 dxdy$ với D là giới hạn bởi các đường

$$x + y = 1, \quad x + y = 3, \quad x - y = 1, \quad x - y = -1$$

b) $\iint\limits_D (2x - y)dxdy$ với D là giới hạn bởi các đường

$$x + y = 1, \quad x + y = 2, \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 0$$

c) $\iint\limits_D \sqrt{x+y}dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường

$$x + y = 0, \quad x + y = 1, \quad y = 1, \quad y = -1$$

d) $\iint\limits_D (x+y)^2 e^{x^2 - y^2} dxdy$ với D: $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le 1$.

<u>HD:</u> a) Đổi biến $u = x + y, \quad v = x - y$ b) Đổi biến $u = x + y, \quad v = 2x - y$

c) Đổi biến $u = x + y, \quad v = y$ d) Đổi biến $u = x + y, \quad v = x - y$

3.7. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường cong $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.

<u>HD:</u> Đổi biến $u = x - 2y + 3, \quad v = 3x + 4y - 1$ đưa miền phẳng về dạng hình tròn.

3.8. Cho $D = \{(x, y) \in R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\}$ (nằm ngoài hình tròn $x^2 + y^2 = 1$, nằm trong hình tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$)

a) Tính diện tích của miền D.

b) Tính tích phân $\iint\limits_D ydxdy$.

<u>HD:</u> Đổi biến tọa độ cực. Trong tọa độ cực thì các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ lần lượt có phương trình là $r = 1$, $r = 2\cos\varphi$, chú ý trong D thì $-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

3.9. Cho D là miền giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{3}\,y$, $y = x$ và $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

a) Tính diện tích của miền D.

b) Tính tích phân $\iint\limits_D xdxdy$.

<u>HD:</u> Đổi biến tọa độ cực. Trong tọa độ cực thì các đường $x = \sqrt{3}\,y, y = x$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ lần lượt có phương trình là $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ và $r = 2\cos\varphi$.

3.10. Tính tích phân $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$, trong đó $D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le y\}$.

<u>HD:</u> Dùng đổi biến tọa độ cực (nếu dùng phép dời trục rồi mới đổi biến tọa độ cực thì sao?)

3.11. Tính $\iint_D xdxdy$ với $D:(x-1)^2+(y-2)^2\le 1$.

<u>HD:</u> Dùng đổi biến tọa độ cực đã dời trục: $x=1+r\cos\varphi,\ y=1+r\sin\varphi$.

II. TÍCH PHÂN BỘI BA.

●Để tính $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ ta xác định: $\Omega:(x,y)\in D\subset Oxy,\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)$ thì

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iint_D\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

Đặc biệt, nếu $\Omega:\ a\le x\le b,\ \psi_1(x)\le y\le\psi_2(x),\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)$ thì

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}dy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Chú ý D là hình chiếu của Ω lên Oxy.

Một số trường hợp đặc biệt:

+ Ω giới hạn bởi các mặt $z=\varphi_1(x,y)$ *và* $z=\varphi_2(x,y)$: nếu khối Ω có **dạng đơn giản** thì D là miền giới hạn bởi hình chiếu của đường giao tuyến hai mặt đó lên Oxy. Giả sử trong D ta có $\varphi_1(x,y)\le\varphi_2(x,y)$ thì $\Omega:(x,y)\in D\subset Oxy,\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)$.
+ Ω giới hạn bởi mặt trụ $\varphi(x,y)=0$ và các mặt $z=\varphi_1(x,y),\ z=\varphi_2(x,y)$: nếu trong miền $D\subset Oxy$ giới hạn bởi đường chuẩn $\varphi(x,y)=0$ của mặt trụ mà $\varphi_1(x,y)\le\varphi_2(x,y)$ thì D chính là hình chiếu của Ω lên Oxy và $\Omega:(x,y)\in D\subset Oxy,\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)$.

Hoàn toàn tương tự trong trường hợp ta chiếu Ω lên Oxz hoặc Oyz.

● Đối với Ω có hình chiếu dạng hình tròn ta có thể dùng phép đổi biến tọa độ trụ, còn nếu Ω có dạng hình cầu ta có thể dùng đổi biến tọa độ cầu.

● Thể tích của Ω: $V(\Omega)=\iiint_\Omega dxdydz$.

3.12. Tính $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ với

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2$ và $\Omega:1\le x\le 2,0\le y\le 2,-1\le z\le 1$.

b) $f(x,y,z)=z$ và $\Omega:0\le x\le 1/4, x\le y\le 2x, 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ và $\Omega:x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1$.

d) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ và $\Omega: x^2+y^2\le 1,\ 1\le z\le 3$.

e) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$ và $\Omega: x^2+y^2\le 2ax,\ 0\le z\le 1\ (a>0)$.

<u>HD:</u> d) $\int\dfrac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}=\ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)+C$

e) Đưa về tích phân kép và đổi biến tọa độ cực $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

3.13. Tính $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ với

a) $f(x,y,z)=xy$ và Ω giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2=1, z=0, z=x^2+y^2$.

b) $f(x,y,z)=z\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ và Ω giới hạn bởi các mặt $z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ và Ω giới hạn bởi mặt ellipxoit $4\left(x^2+y^2\right)+z^2=4$.

d) $f(x,y,z)=y$ và Ω giới hạn bởi mặt nón $y=\sqrt{x^2+z^2},\ y=a(a>0)$.

e) $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$ và Ω giới hạn bởi các mặt $y^2=4x-x^2,\ z=0, z=1$.

f) $f(x,y,z)=z^2$ và $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2az, x^2+y^2+z^2\le a^2\ (a>0)$.

g) $f(x,y,z)=z^2$ và $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$.

h) $f(x,y,z)=z^2$ và $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2\le 2x$.

<u>HD:</u> a),b),c): hình chiếu D của Ω lên Oxy là hình tròn $x^2+y^2\le 1$ hoặc dùng tọa độ trụ.

d): hình chiếu D của Ω lên Oxz là $x^2+z^2\le a^2$.

e): hình chiếu D của Ω lên Oxz là hình tròn $(x-2)^2+y^2\le 2^2$ hoặc dùng tọa độ trụ.

f): hình chiếu D của Ω lên Oxz là hình tròn $x^2+y^2\le\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2$.

g): hình chiếu D của Ω lên Oxz là hình tròn $x^2+y^2\le R^2$ hoặc dùng tọa độ cầu.

h): hình chiếu D của Ω lên Oxz là hình tròn $(x-1)^2+y^2\le 1$ hoặc dùng tọa độ trụ.

3.14. Tính $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ với

a) $f(x,y,z)=1-x-y-z$ và $\Omega: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z\le 1$

b) $f(x,y,z)=x+y+z$ và Ω giới hạn bởi các mặt $x=0, y=0, x+y=1, z=0, z=1$.

c) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z)^3}$ và Ω giới hạn bởi các mặt $x+z=3, y=2,\ x=0, y=0, z=0$.

d) $f(x,y,z)=xy$ và Ω giới hạn bởi các mặt $y=x^2, z=0$ và $y+z=4$.

<u>HD:</u> a),b): hình chiếu D của Ω lên Oxy là tam giác $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$.

c): hình chiếu D của Ω lên Oxz là tam giác $x\ge 0, z\ge 0, x+z\le 3$.

d): hình chiếu D của Ω lên Oxz là miền giới hạn bởi $y=x^2$ và $y=4$

3.15. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt cong

a) $z=0,\quad x^2+y^2=1,\quad z=\sqrt[3]{1+x^2+y^2}$.

b) $z=0,\quad y=x^2,\quad y=1,\quad z=1+x^2\sqrt{y}$.

c) $z=0,\quad y=x^2,\quad y+z=1$.

d) $z=x^2+y^2$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

e) $z=x^2+y^2$ và $z=2-x^2-y^2$.

f) $z=x^2+y^2$ và $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

g) $z=2-x^2-y^2$ và $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

h) $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ và $x^2+y^2-z^2=0$.

3.16. Tính thể tích của vật giới hạn bởi mặt $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^2\left(x^2+y^2-z^2\right)\ (a>0)$

<u>HD:</u> Dùng tọa độ cầu.

III. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT.

●Để tính tích phân đường loại một $\int\limits_{AB} f(x,y)ds$ ta tham số hóa cung AB**:**

$$AB:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\ (a\le t\le b)$$

Khi đó $$\int\limits_{AB} f(x,y)ds=\int_a^b f\left(x(t),y((t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

Đặc biệt

Nếu $AB: y=f(x)\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$**,** nếu $AB: r=r(\varphi)\Rightarrow\begin{cases}x=r(\varphi)\cos\varphi\\ y=r(\varphi)\sin\varphi\end{cases}$

●Độ dài đường cong AB: $l(AB)=\int\limits_{AB} ds$

3.17. Tính tích phân đường loại một $\int\limits_{C} f(x,y)ds$ với

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$ với C là đoạn thẳng nối $O(0,0)$ và $A(1,2)$.

b) $f(x,y)=x+y$ với C là nửa trên đường tròn $x^2+y^2=a^2$.

c) $f(x,y)=xy$ với C là ¼ ellip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ở góc ¼ thứ nhất.

d) $f(x,y)=x$ với C là hình tròn $x^2+y^2=2x$.

e) $f(x,y)=\sqrt{y}$ với C là hình tròn $x^2+y^2=2y$.

3.18. Tính tích phân đường loại một $\int_C f(x,y,z)ds$ với

a) $f(x,y,z)=z\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ với C là phần đường cong

$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt\,(0\le t\le 2\pi)$, a>0, b>0.

b) $f(x,y,z)=x+y$ với C là phần tư đường tròn $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x=y\end{cases}$, nằm trong góc phần tám thứ nhất.

c) $f(x,y,z)=xyz$ với C là phần tư đường tròn $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}\end{cases}$, nằm trong góc phần tám thứ nhất.

IV. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI.

●Để tính tích phân đường loại hai $\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ta tham số hóa cung AB**:**

$$AB:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\ (t_A=a, t_B=b)$$

(có thể a>b)

Khi đó $$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$

●Nếu C là đường cong kín giới hạn miền D ta có thể dùng công thức Green đưa tích phân đường loại hai về tích phân kép

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \text{ (C lấy theo hướng dương)}$$

Chú ý trong trường hợp này thường thì P(x,y) chứa 1 hàm phức tạp độc lập theo biến x, Q(x,y) chứa một hàm phức tạp độc lập theo biến y (giải thích vì sao?).

Nếu $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ (tích phân không phụ thuộc đường đi) để tính $\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ta chọn đường đi đơn giản từ A tới B.

3.19. Tính $\int_C\left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy+y^2\right)dy$ với C là cung nối từ A(1,1) tới B(2,4) dọc theo cung $y=x^2$.

3.20. Tính $\int_C y^2dx+x^2dy$ với C là nửa trên ellip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ theo chiều kim đồng hồ.

3.21. Tính $\int_C ydx-(y+x^2)dy$ với C là phần cung parabol $y=2x-x^2$ nằm phía $y\ge 0$ và theo chiều ngược kim đồng hồ.

3.22. Tính $\int\limits_C (xy-1)\,dx + x^2 y dy$ với C đường đi từ A(1,0) tới B(0,2) theo các đường

a) Đường thẳng nối A và B.

b) Đường parabol $x = 1 - \dfrac{y^2}{4}$.

3.23. Tính $\int\limits_C xdx + ydy + z^2 dz$ với C là cung $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ (a>0, b>0) đi từ A(a,0,0) đến B(a,0,2πb).

3.24. Tính $\int\limits_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$ với C là đường cong giao tuyến 2 mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và $z = x^2 + y^2$ đi theo chiều ngược chiều kim đồng hồ nhìn theo trục Oz.

3.25. Tính $\int\limits_C 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x+y)^2 dy$ với C là cung biên tam giác A(1,1),B(2,2),C(1,3) theo chiều dương bằng 2 cách

a) Tính trực tiếp.

b) Dùng công thức Green.

3.26. Tính $\int\limits_C \left(e^x x^2 - xy\right) dx + (x^2 + y)dy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ theo chiều dương.

3.27. Tính $\int\limits_C \left(x\sin x + y^2\right) dx + (y^2 e^{-y} + 2xy)dy$ với C là nửa trên ellip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

3.28. Tính $\int\limits_C \left(x^2 \arctan x + y^2\right) dx + (y^2 e^{-y} + 2xy + x)dy$ với C là nửa trên ellip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

<u>HD:</u> Nối đoạn A(-a,0),B(a,0) để thành đường cong kín và dùng công thức Green.

CHƯƠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1.

● Chú ý công thức $y'=\frac{dy}{dx}$ để đưa phương trình về dạng vi phân hay dạng đạo hàm.

Dạng $y'=f(ax+by+c)$ đưa được về dạng có biến phân li bằng phép đặt $z=ax+by+c$.

● Thông thường ta tìm nghiệm dạng $y=y(x)$ nhưng trong một số trường hợp, để đơn giản, ta tìm nghiệm dạng $x=x(y)$ (là hàm ngược của hàm $y=y(x)$). Khi đó chú ý

$$y_x^{'}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x_y^{'}}$$

<u>Ví dụ:</u> Tìm nghiệm của phương trình $y'+\cos\left(x+2y\right)=\cos\left(x-2y\right)$ với điều kiện $y\left(0\right)=\frac{\pi}{4}$

Đưa về $\frac{dy}{dx}-2\sin x\sin 2y=0$

+ $\sin 2y=0\Leftrightarrow y=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$ không là nghiệm vì không thỏa $y(0)=\frac{\pi}{4}$

+ $\sin 2y\neq 0\Leftrightarrow y\neq\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$ đưa về dạng có biến phân li

$$\frac{dy}{\sin 2y}-2\sin xdx=0\Leftrightarrow\int\frac{dy}{\sin 2y}-\int 2\sin xdx=C\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\int\frac{d\cos 2y}{1-\cos^2 2y}+2\cos x=C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos 2y-1}{\cos 2y+1}\right|+2\cos x=C$$

Điều kiện $y(0)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos 2\frac{\pi}{4}-1}{\cos 2\frac{\pi}{4}+1}\right|+2\cos 0=C\Leftrightarrow C=2$

Vậy nghiệm riêng cần tìm là $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos 2y}{1+\cos 2y}+2\cos x=2$

<u>Ví dụ:</u> Gptvp $y'x^3\sin y+2y=xy'$

Ta tìm nghiệm ở dạng $x=x(y)$ chú ý $y_x^{'}=\frac{1}{x_y^{'}}$.

* Nếu $y'=0\Leftrightarrow y=C$ thay vào pt ta được $C=0$. Vậy $y=0$ là một nghiệm của pt.

* Nếu $y'\neq 0$, phương trình tương đương với

$$y'x^3\sin y+2y=xy'$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{y'}-\frac{1}{2y}x=-\frac{x^3\sin y}{2y}$$

$$\Leftrightarrow x'-\frac{1}{2y}x=-\frac{x^3\sin y}{2y}\quad(1)$$

ở đây $x'=x_y^{'}$, $x=x(y)$. Phương trình (1) là phương trình Bernoulli theo x là hàm của y. Đưa về dạng (chú ý $x\neq 0$ (?))

$$\frac{x'}{x^3}-\frac{1}{2y}x^{-2}=-\frac{\sin y}{2y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^{-2})'}{-2}-\frac{1}{2y}x^{-2}=-\frac{\sin y}{2y}$$

$$\Leftrightarrow z'+\frac{1}{y}z=\frac{\sin y}{y} \quad (2)$$

với $z=x^{-2}$, (2) là ptvp tuyến tính cấp 1 nên có NTQ

$$z=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\int e^{\int\frac{1}{y}dy}\frac{\sin y}{y}dy+C\right)=\frac{-\cos y+C}{y} \Leftrightarrow x^{-2}=\frac{-\cos y+C}{y}$$

Vậy ptvp có các ngiệm

+ y=0

+ $\frac{1}{x^2}+\frac{\cos y+C}{y}=0$

4.1. Giải các ptvp

a) $tgydx-x\ln xdy=0$

b) $\cos x.\ y'=y$

c) $y'=a\cos y+b \quad (b>a>0)$

d) $y'(x+y)=1$

HD: Là các pt loại tách biến.

4.2. Tìm các nghiệm riêng của ptvp thỏa mãn điều kiện tương ứng

a) $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0$ thỏa $y(0)=1$.

b) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx$ thỏa $y(0)=0$.

c) $xydx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy=0$ thỏa $y(\sqrt{8})=1$.

d) $y'=-\frac{3x+3y-1}{2(x+y)}$ thỏa $y(0)=2$.

e) $y'tgx=y$ thỏa $y(\frac{\pi}{2})=1$.

HD: Đây là các pt tách biến được, tìm NTQ rồi sau đó tìm nghiệm riêng thỏa điều kiện tương ứng

4.3. Giải các ptvp tuyến tính cấp 1

a) $y'-2xy=1-2x^2$

b) $y'=\frac{1}{x}(2y+xe^x-2e^x)$

c) $x(1+x^2)y'-y(x^2-1)+2x=0$

d) $(1+x^2)y'+y=arctgx$

4.4. Giải các ptvp

a) $y'(x+y^2)=y$

b) $(2xy+3)dy-y^2dx=0$

c) $2ydx=(2y^3-x)dy$

d) $ydx-(x+y^2\sin y)dy=0$

HD: Coi x là hàm theo y

4.5. Giải các ptvp

a) $y'+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$

b) $xy'-y(2y\ln x-1)=0$

c) $y'-2ytgx+y^2\sin^2 x=0$

d) $y'=y(y^3\cos x+tgx)$

HD: Là các pt Bernoulli.

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2.

Các ptvp dạng $F(x, y', y'') = 0$ & $F(y, y', y'') = 0$ ta đều đưa được về ptvp cấp 1 bằng phép đặt $z = y'$. Chú ý là dạng thứ nhất thì đưa về cấp 1 theo x, z còn dạng thứ 2 thì đưa về cấp 1 theo y, z.

<u>**Ví dụ:**</u> Giải ptvp $yy'' - 2yy'\ln y - (y')^2 = 0$

Đặt $y' = z \Rightarrow y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, phương trình trở thành

$$yz\frac{dz}{dy} - 2yz\ln y - z^2 = 0$$

+ $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = C \quad (C > 0)$ là nghiệm pt.
+ $z \neq 0 \Leftrightarrow y \neq C$ đưa pt về

$$z'_y - \frac{1}{y}z = 2\ln y$$

Đây là ptvp tuyến tính cấp 1 đối với z (theo biến y).

4.6. Giải các ptvp

a) $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$

b) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$ thỏa mãn điều kiện $y(2) = 1, y'(2) = -1$.

c) $y'' = y' + (y')^3$

d) $1 + (y')^2 = yy''$

e) $yy'' - (y')^2 = y^2\ln y$

f) $y''\cos y + (y')^2\sin y - y' = 0$ thỏa điều kiện $y(-1) = \dfrac{\pi}{6}, y'(-1) = 2$.

g) $yy'' = y'(y'+1)$

<u>HD</u>: a), b) : pt giảm cấp được không chứa y;
c)-g) : pt giảm cấp được không chứa x.