

Xây dựng các hàm phân bố chiều cao của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi

Nguyễn Văn Thêm¹, Nguyễn Văn Quý^{2*}

¹Hội Khoa học và Kỹ thuật Lâm nghiệp TP. Hồ Chí Minh

²Trường Đại học Lâm nghiệp - Phân hiệu Đồng Nai

Developing height distribution functions of mixed species natural forests and even pure- species plantations

Nguyen Van Them¹, Nguyen Van Quy^{2*}

¹Ho Chi Minh City Forestry Science and Technology Association

²Vietnam National University of Forestry - Dong Nai Campus

*Corresponding author: quynvfu@gmail.com

<https://doi.org/10.55250/jo.vnuf.15.5.2026.043-052>

TÓM TẮT

Bài báo này giới thiệu ba hàm mới để ước lượng phân bố chiều cao của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi. Mục tiêu của nghiên cứu này là xây dựng hàm phân bố chiều cao của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi với các biến dự đoán thích hợp. Số liệu nghiên cứu bao gồm 10 ô tiêu chuẩn ở rừng tự nhiên hỗn loài và 15 ô tiêu chuẩn ở rừng trồng Thông ba lá (*Pinus kesiya*) tại tuổi 15, 20 và 28 năm. Diện tích mỗi ô tiêu chuẩn là 2.000 m². Nghiên cứu này đề xuất ba hàm mới sau đây: (1) $F(H) = \exp(a + b \times \ln(H) + c \times (h/H_{\max})^d)$; (2) $F(H) = \exp(a + b \times \sqrt{H} + c \times (h/H_{\max})^d)$; (3) $F(H) = \exp(a + b \times (h/H_{\max}) + c \times (h/H_{\max})^d)$. Ba hàm mới này được so sánh với 4 hàm phân bố của Gompertz (1825), Weibull, Burr (1942) và Richards (1980). Kết quả nghiên cứu cho thấy không có hàm phân bố nào trong số 7 hàm dự tuyển mô tả tốt nhất phân bố N/H của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi. Khi phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch phải, ba hàm mới này phù hợp hơn so với 4 hàm Gompertz, Weibull, Burr và Richards. Khi phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch trái hoặc gần đối xứng, ba hàm mới này kém phù hợp hơn so với hàm Burr và Richards, nhưng vẫn tốt hơn so với 2 hàm Gompertz và Weibull. Ưu điểm của ba hàm mới này là các tham số của chúng được xác định dễ dàng bằng phương pháp hồi quy tuyến tính và hồi quy phi tuyến tính.

ABSTRACT

This paper presents three new functions to estimate the height distribution of mixed species natural forests and even pure-species plantations. The objective of this study was to construct height distribution functions of mixed species natural forests and even pure-species plantations with appropriate predictor variables. The research data included 10 standard plots in mixed species natural forests and 15 standard plots in *Pinus kesiya* plantations at 15, 20 and 28 years of age. The area of each standard plot was 2,000 m². This study proposed the following three new functions: (1) $F(H) = \exp(a + b \times \ln(H) + c \times (h/H_{\max})^d)$; (2) $F(H) = \exp(a + b \times \sqrt{H} + c \times (h/H_{\max})^d)$; (3) $F(H) = \exp(a + b \times (h/H_{\max}) + c \times (h/H_{\max})^d)$. These three new functions were compared with the four distribution functions of Gompertz (1825), Weibull, Burr (1942) and Richards (1980). The results showed that no function in 7 candidate functions best described the $F(H)$ distribution of mixed species natural forests and even pure plantations. When the height distribution has a left-skewed peak, these three new functions are more suitable than the four functions of Gompertz, Weibull, Burr and Richards. When the height distribution has a nearly symmetrical peak or right-skewed peak, these three new functions are less suitable than the functions of Burr and Richards, but better than the two functions of Gompertz and Weibull. The advantage of these three new functions was that their parameters are easily determined by linear and non-linear regression methods.

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 24/11/2025

Ngày phản biện: 29/12/2025

Ngày quyết định đăng: 20/01/2026

Từ khóa:

Hàm phân bố chiều cao, phân bố chiều cao, quần thụ rừng, rừng tự nhiên hỗn loài, rừng trồng thuần loài đồng tuổi.

Keywords:

Even pine plantation, forest stands, height distribution, height distribution function, mixed species natural forest.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Quần thụ là một tập hợp các loài cây gỗ trong một khoảnh rừng. Nghiên cứu kết cấu loài cây gỗ và cấu trúc của quần thụ là nhiệm vụ quan trọng của lâm học và điều tra rừng. Kết quả của những nghiên cứu này cung cấp cơ sở khoa học cho điều chế rừng và quản lý rừng. Cấu trúc đứng của quần thụ là sự tổ chức và sắp xếp của các loài cây gỗ theo chiều thẳng đứng. Cấu trúc đứng của các quần thụ có thể biểu diễn bằng các bảng và đồ thị phân bố số cây (N, cây) theo các cấp chiều cao (H, m) (kí hiệu: N/H). Tuy vậy, hai phương pháp này không cho phép nhà lâm học và điều tra rừng ước lượng và dự đoán chính xác số cây trong các cấp H. Xác định số cây trong các cấp H của các quần thụ ở rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi là một công việc rất khó khăn [1-3]. Để ước lượng phân bố N/H của các quần thụ, ngày nay các nhà lâm học và điều tra rừng thường áp dụng các mô hình phân bố xác suất. Đường cong phân bố xác suất tích lũy số cây (N, cây) theo các cấp H (Kí hiệu: F_H) của các quần thụ có dạng đường cong Sigmoid hay đường cong hình chữ S. Tùy theo kiểu rừng và trạng thái của rừng, phân bố $F(H)$ của các quần thụ có thể được mô tả bằng các hàm phân bố chuẩn, Lognormal, Gamma, Beta [4, 5], Gompertz (1825) [6], Burr (1942) [7], Weibull và Richards (1980) [8-10]. Rừng tự nhiên nhiệt đới có cấu trúc rất phức tạp. Vì thế, Renato Lima và cộng sự (2015) [11] đã áp dụng rất nhiều hàm khác nhau để phân tích cấu trúc của rừng mưa nhiệt đới ở Brasil. Ở Việt Nam, một số tác giả [12-14] đã áp dụng hàm phân bố Richards (1980) để mô tả phân bố N/H của rừng kín thường xanh hơi ẩm nhiệt đới (Rkn) [1] ở tỉnh Đồng Nai. Nói chung, phương pháp xác định các tham số của các hàm phân bố này thường gặp rất nhiều khó khăn. Vì vậy, bên cạnh việc áp dụng các hàm phân bố đã có, nghiên cứu này phát triển các hàm phân bố N/H mới với các tham số dễ xác định. Trong nghiên cứu này, các hàm phân bố N/H mới được đề xuất để ước lượng phân bố N/H của các quần thụ trong rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi. Số liệu để phát triển các hàm phân bố N/H mới dựa trên phân bố N/H thực nghiệm của các quần thụ

trong rừng kín thường xanh hơi ẩm nhiệt đới (Rkn) ở giai đoạn ổn định tại tỉnh Đồng Nai và rừng trồng Thông ba lá (*Pinus kesiya* Royle ex Gordon) ở tuổi 15, 20 và 28 năm tại khu vực Đức Trọng thuộc tỉnh Lâm Đồng. Mục tiêu của nghiên cứu này là xây dựng các hàm phân bố N/H của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi với các biến dự đoán thích hợp. Kết quả của nghiên cứu này cung cấp các hàm mới để ước lượng phân bố N/H của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Phương pháp thu thập số liệu

Phân bố N/H của Rkn ở giai đoạn ổn định được phân chia thành 2 trường hợp: (1) Phân bố N/H có dạng lệch phải (Kí hiệu: Rkn - 1); (2) Phân bố N/H có dạng gần đối xứng (Kí hiệu: Rkn - 2). Số liệu chiều cao của Rkn được thu thập từ 10 ô tiêu chuẩn tạm thời (OTC) với diện tích 2.000 m² (50 m × 40 m); trong đó mỗi trường hợp là 5 OTC. Trong các OTC ở Rkn, tất cả những cây gỗ trưởng thành ($D \geq 6,0$ cm) được xác định chiều cao vút ngọn (H, m) bằng thước đo cao Blume – Leise; sau đó phân chia thành các cấp H. Số liệu 10 OTC cho thấy biên độ H của các cây gỗ dao động từ 7 đến 34 m. Để thấy rõ quy luật phân bố N/H của Rkn, số cây trong các OTC được phân chia thành 7 cấp với mỗi cấp H = 4,0 m. Phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá được phân tích theo 3 trường hợp. Trường hợp 1: Phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch phải. Trường hợp 2: Phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch trái. Trường hợp 3: Phân bố N/H có dạng 1 đỉnh gần đối xứng. Ba trường hợp này đặc trưng cho rừng trồng Thông ba lá ở giai đoạn non và trung niên. Trong nghiên cứu này, phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá được xem xét ở tuổi 15, 20 và 28 năm. Tổng số 15 OTC ở rừng trồng Thông ba lá với kích thước 2.000 m² (40 m × 50 m); trong đó mỗi tuổi là 5 OTC. Trong các OTC, chiều cao vút ngọn (H, m) được đo bằng thước đo cao Blume – Leise. Số liệu 15 OTC cho thấy biên độ H của các cây gỗ ở tuổi 15, 20 và 28 năm dao động tương ứng từ 10 đến 18 m, 13 đến 21 m và 15 đến 23 m. Để thấy rõ quy luật phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá, số cây trong các OTC được phân chia thành 6-7 cấp với mỗi cấp H = 1,0 m. Bảng

1-5 tổng hợp tương ứng phân bố N/H của Rkn và rừng trồng Thông ba lá ở tuổi 15, 20 và 28 năm; trong đó N là số cây, N% là tỉ lệ số cây

trong các cấp H, $f(H)$ là xác suất bắt gặp số cây trong các cấp H, $F(H)$ là xác suất tích lũy số cây trong các cấp H.

Bảng 1. Phân bố N/H của Rkn (1)

Cấp H(m)	N (cây/ha)	N%	$f(H)$	$F(H)$
≤ 8	215	21,3	0,21287	0,21287
12	480	47,5	0,47525	0,68812
16	169	16,7	0,16733	0,85545
20	78	7,7	0,07723	0,93267
24	42	4,2	0,04158	0,97426
≥ 28	26	2,6	0,02574	1,00000
Tổng số	1.010	100	1,00000	

2.3. Phương pháp xử lí số liệu

Trước hết tính các đặc trưng thống kê mô tả phân bố N/H của Rkn và rừng trồng Thông ba lá. Chỉ tiêu tính toán bao gồm trung bình (H_{Bq} , m), trung vị (Me), chiều cao xuất hiện nhiều nhất (Mode), sai tiêu chuẩn (SEE), hệ số biến động (CV%), độ lệch (Sk), độ nhọn (Ku), cấp H

nhỏ nhất và lớn nhất. Tiếp đến xây dựng hàm phân bố $F(H)$ đối với Rkn và rừng trồng Thông ba lá. Đồ thị biểu diễn phân bố $F(H)$ của Rkn và rừng trồng Thông ba lá đều có dạng đường cong Sigmoid. Đường cong này có thể mô tả bằng hàm số mũ (Exponent).

Bảng 2. Phân bố N/H của Rkn (2)

Cấp H (m)	N (cây/ha)	N%	$f(H)$	$F(H)$
≤ 8	40	4,9	0,04878	0,04878
12	80	9,8	0,09756	0,14634
16	200	24,4	0,24390	0,39024
20	280	34,1	0,34146	0,73171
24	155	18,9	0,18902	0,92073
28	55	6,7	0,06707	0,98780
≥ 32	10	1,2	0,01220	1,00000
Tổng số	820	100	1,00000	

Bảng 3. Phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá ở tuổi 15 năm

Cấp H (m)	N (cây/ha)	N%	$f(H)$	$F(H)$
≤ 12	55	5,9	0,05946	0,05946
13	155	16,8	0,16757	0,22703
14	255	27,6	0,27568	0,50270
15	205	22,2	0,22162	0,72432
16	165	17,8	0,17838	0,90270
≥ 17	90	9,7	0,09730	1,00000
Tổng số	925	100	1,00000	

Bảng 4. Phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá ở tuổi 20 năm

Cấp H (m)	N (cây/ha)	N%	$f(H)$	$F(H)$
≤ 14	55	6,4	0,06395	0,06395
15	110	12,8	0,12791	0,19186
16	200	23,3	0,23256	0,42442
17	265	30,8	0,30814	0,73256
18	158	18,4	0,18372	0,91628
≥ 19	72	8,4	0,08372	1,00000
Tổng số	860	100	1,00000	

Trong nghiên cứu này, hàm phân bố $F(H)$ mới được đề xuất theo 3 dạng như hàm 1÷3 (Bảng 6), tương ứng kí hiệu là Thêm 2025(a), Thêm 2025(b) và Thêm 2025(c). Ở Hàm 1÷3, $H(m)$ là cấp H; $h(m)$ là H của cấp H thứ i ; H_{Max} là H của cấp H_{Max} ; a , b , c và d là các tham số. Ưu điểm của 3 hàm 1÷3 được so sánh với 4 hàm khác: Gompertz 3 tham số (1825), Weibull 3 tham số, Burr (1942) và Richards (1980) (Bảng 6). Ở hàm 4÷6, b là tốc độ giảm số cây theo sự gia tăng cấp H, a là tham số vị trí, c là tham số hình dạng. Ở hàm 7, q là tham số vị trí; p là tham số tỷ lệ, r là tham số hình dạng ($p, q > 0$; r

< 0). Các tham số của các hàm 1÷7 được xác định theo phương pháp hồi quy phi tuyến tính của Marquardt. Mức độ chính xác của các hàm này được đánh giá theo hệ số xác định (R^2), tổng bình phương sai lệch (SSE), sai số ước lượng (SEE), sai số tuyệt đối trung bình (MAE), sai số tuyệt đối trung bình theo phần trăm (MAPE), sai số trung bình (ME) và sai số trung bình theo phần trăm (MPE). Mục đích của phân tích hồi quy là tìm ra một hàm mô tả tốt phân bố N/H của rừng với sai lệch nhỏ nhất. Theo mục đích này, hàm phân bố N/H thích hợp được chọn theo tiêu chuẩn SSE_{Min} và SSE_{Min} .

Bảng 5. Phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá ở tuổi 28 năm

Cấp H (m)	N (cây/ha)	N%	f(H)	F(H)
≤ 16	32	4,1	0,04113	0,04113
17	55	7,1	0,07069	0,11183
18	145	18,6	0,18638	0,29820
19	200	25,7	0,25707	0,55527
20	250	32,1	0,32134	0,87661
21	76	9,8	0,09769	0,97429
≥ 22	20	2,6	0,02571	1,00000
Tổng số	778	100	1,00000	

Bảng 6. Bảy hàm dự tuyển để ước lượng phân bố N/H của Rkn và rừng trồng Thông ba lá

Dạng hàm ^(*)	Hàm phân bố	
$F(H) = \exp(a + b \times \ln(H) + c \times (h/H_{Max})^{-d})$	Thêm 2025(a)	(1)
$F(H) = \exp(a + b \times \sqrt{H} + c \times (h/H_{Max})^{-d})$	Thêm 2025(b)	(2)
$F(H) = \exp(a + b \times (h/H_{Max}) + c \times (h/H_{Max})^{-d})$	Thêm 2025(c)	(3)
$F(H) = (1 - b \times \exp(-c \times H))^d$	Gompertz-Verhulst (1825)	(4)
$F(H) = 1 - \exp(-(H - a)/b)^c$	Weibull 3 tham số	(5)
$F(H) = 1 - (1 + (H/a)^b)^{-c}$	Burr (1942)	(6)
$F(H) = 1 + \exp(-(H - q)/p)^{-r}$	Richards (1980)	(7)

(*) Nguồn: [6-9]

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Đặc trưng thống kê phân bố chiều cao của Rkn và rừng trồng Thông ba lá

Đặc trưng thống kê phân bố N/H của Rkn ở giai đoạn ổn định và rừng trồng Thông ba lá ở tuổi 15, 20 và 28 năm được tổng hợp ở Bảng 7. Đối với Rkn (1), $N = 1.010$ cây/ha, H bình quân (H_{Bq}, m) = $13,4 \pm 4,7$ m. Biên độ cấp H dao động từ $8 \div 28$ m. Hệ số biến động rất lớn ($CV = 35,0\%$). Giá trị $H_{Bq} > Me$ và $Mode$, $Sk > 0$ và $Ku > 0$ chứng tỏ đường cong phân bố N/H có

dạng 1 đỉnh lệch phải và nhọn. Đối với Rkn (2), $N = 820$ cây/ha, H bình quân (H_{Bq}, m) = $19,1 \pm 5,0$ m. Biên độ cấp H dao động từ $8 \div 32$ m. Hệ số biến động rất lớn ($CV = 26,2\%$). Giá trị $H_{Bq} < Me$ và $Mode$, $Sk \approx 0$ và $Ku < 0$ chứng tỏ đường cong phân bố N/H có dạng 1 đỉnh gần đối xứng và tù. Đối với rừng trồng Thông ba lá 15 tuổi, $N = 925$ cây/ha, $H_{Bq} = 14,6 \pm 1,37$ m. Biên độ cấp H dao động từ $12 \div 17$ m. Hệ số biến động rất nhỏ ($CV = 9,4\%$). Giá trị $H_{Bq} > Me$ và $Mode$, $Sk > 0$ và $Ku < 0$ chứng tỏ đường cong phân bố

N/H có dạng 1 đỉnh lệch phải và tù. Đối với rừng trồng Thông ba lá 20 tuổi, $N = 860$ cây/ha, $H_{Bq} = 16,7 \text{ m} \pm 1,32 \text{ m}$. Biên độ cấp H dao động từ 14÷19 m. Hệ số biến động rất nhỏ ($CV = 7,9\%$). Giá trị $H_{Bq} < Me$ và $Mode, Sk < 0$ và $Ku < 0$ chứng tỏ đường cong phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch

trái và tù. Đối với rừng trồng Thông ba lá 28 tuổi, $N = 778$ cây/ha, $H_{Bq} = 19,1 \text{ m} \pm 1,32 \text{ m}$. Biên độ cấp H dao động từ 14÷19 m. Hệ số biến động rất nhỏ ($CV = 6,9\%$). Giá trị $H_{Bq} \approx Me$ và $Mode, Sk < 0$ và $Ku < 0$ chứng tỏ đường cong phân bố N/H có dạng 1 đỉnh gần đối xứng và tù.

Bảng 7. Đặc trưng thống kê phân bố chiều cao của Rkn và rừng trồng Thông ba lá

TT	Thống kê ^(*)	Rừng tự nhiên		Rừng trồng Thông ba lá ở tuổi (năm)		
		Rkn (1)	Rkn (2)	15	20	28
1	N (cây/ha)	1.010	820	925	860	778
2	H_{Bq} (m)	13,4	19,1	14,6	16,7	19,1
3	Me (m)	12	20	14,0	17	19
4	Mode (m)	12	20	14,0	17	20
5	H_{Min} (m)	8	8	12	14	8
6	H_{Max} (m)	28	32	17	19	22
7	$\pm SEE$ (m)	4,7	5,0	1,37	1,32	1,33
8	CV%	35,0	26,2	9,4	7,9	6,9
9	Sk	1,215	-0,100	0,058	-0,171	-0,352
10	Ku	1,346	-0,088	-0,787	-0,544	-0,138

(*) Me = Trung vị; Mode = Giá trị H xuất hiện nhiều nhất; SEE = Sai tiêu chuẩn; Sk = Độ lệch; Ku = Độ nhọn.

3.2. Xây dựng hàm phân bố chiều cao của Rkn và rừng trồng Thông ba lá

3.2.1. Hàm phân bố chiều cao của Rkn

Những kiểm định thống kê từ số liệu ở Bảng 1 và 2 cho thấy 7 hàm dự tuyển 1÷7 mô tả tốt phân bố F(H) của Rkn (1) và Rkn (2) (Bảng 8-11). Đối với Rkn (1), số liệu ở Bảng 9 cho thấy 7 hàm dự tuyển đều nhận hệ số xác định rất cao; trong đó cao nhất ở hàm 1 ($R^2 = 99,99\%$), thấp nhất ở hàm 7 ($R^2 = 99,13\%$). Hai thống kê sai lệch nhận giá trị thấp nhất ở hàm 1 ($SSE = 0,000021$; $SEE = \pm 0,003209$), cao nhất ở hàm 7 ($SSE = 0,003876$; $SEE = \pm 0,035944$). Hàm 1÷3, 5 và 7 nhận sai số hệ thống âm ($ME < 0$), còn hàm 4

và 6 nhận sai số hệ thống dương ($ME > 0$). Giá trị $MAPE_{Min}$ xuất hiện ở hàm 1 (0,20%), còn $MAPE_{Max}$ ở hàm 7 (3,83%). Nói chung, so với SSE của hàm 1, giá trị này ở hàm 2, 3, 4, 5, 6 và 7 lớn hơn tương ứng là 1,33 lần và 1,76 lần, 11,29 lần, 24,24 lần, 38,10 lần và 184,57 lần. Hình 1(a) biểu diễn sự khác biệt về hình dạng của đường cong phân bố N/H của Rkn(1) được ước lượng theo 5 hàm phân bố khác nhau. Theo tiêu chuẩn SSE_{Min} và SEE_{Min} , hàm 1 (Thêm 2025a) xếp hạng 1. Đây là hàm thích hợp để xây dựng hàm ước lượng phân bố F(H) của Rkn (1). Mô hình ước lượng phân bố F(H) của Rkn (1) có dạng như hàm 8.

Bảng 8. Bảy hàm ước lượng phân bố F(H) của Rkn (1)

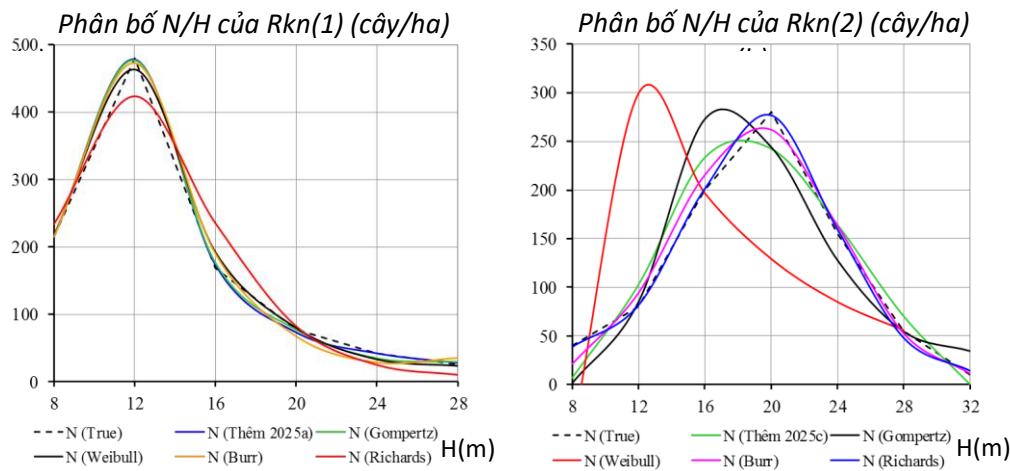
Hàm	Biểu thức toán học của các hàm F(H)	
(1)	$F(H) = \exp(-0,476577 + 0,14598 \times \ln(H) - 0,0081902 \times (h/H_{Max})^{-4,08836})$	(8)
(2)	$F(H) = \exp(-0,283876 + 0,0558949 \times \sqrt{H} - 0,010015 \times (h/H_{Max})^{-3,9546})$	(9)
(3)	$F(H) = \exp(-0,137258 + 0,150874 \times (h/H_{Max}) - 0,0115717 \times (h/H_{Max})^{-3,85665})$	(10)
(4)	$F(H) = (1 - 4,13585 \times \exp(-0,192921 \times H))^{0,71879}$	(11)
(5)	$F(H) = 1 - \exp(-((H - 6,89528)/1,31 \times 10^6)^{287742})$	(12)
(6)	$F(H) = 1 - (1 + (H/8,57562)^{6,6375})^{-0,491672}$	(13)
(7)	$F(H) = (1 + \exp(-(H - 0,329973)/3,18098))^{-17,0245}$	(14)

Đối với Rkn (2), số liệu ở Bảng 11 cho thấy 7 hàm dự tuyến đều nhận hệ số xác định rất cao; trong đó cao nhất ở hàm 7 ($R^2 = 99,99\%$), thấp nhất ở hàm 5 ($R^2 = 90,26\%$). Hai thống kê sai lệch nhận giá trị thấp nhất ở hàm 7 ($SSE = 0,000063$; $SEE = \pm 0,003961$), cao nhất ở hàm 5 ($SSE = 0,095802$; $SEE = \pm 0,154760$). Bảy hàm này đều nhận sai số hệ thống dương ($ME > 0$). Giá trị $MAPE_{Min}$ xuất hiện ở hàm 7 (0,80%), còn $MAPE_{Max}$ ở hàm 5 (59,2%). Nói chung, so với SSE của hàm 7, giá trị này ở hàm 1, 2, 3, 4, 5 và

6 lớn hơn tương ứng 90,6 lần, 62,2 lần, 49,5 lần, 129,9 lần, 1521 lần và 13,0 lần. Hình 1(b) biểu diễn sự khác biệt về hình dạng của đường cong phân bố N/H của Rkn(2) được ước lượng theo 5 hàm phân bố khác nhau. Theo tiêu chuẩn SSE_{Min} và SEE_{Min} , hàm 7 (Richards, 1980) xếp hạng 1. Đây là hàm thích hợp để xây dựng hàm ước lượng phân bố F(H) của Rkn (2). Mô hình ước lượng F(H) của Rkn (2) có dạng như hàm 21.

Bảng 9. Sai lệch của 7 hàm ước lượng phân bố F(H) của Rkn (1)

Hàm	$R^2(\%)$	SSE	$\pm SEE$	MAE	MAPE	ME	MPE	Hạng
(1)	99,99	0,000021	0,003209	0,001644	0,20	-0,000011	-0,01	1
(2)	99,98	0,000028	0,003763	0,001929	0,24	-0,000015	-0,02	2
(3)	99,98	0,000037	0,004294	0,002197	0,27	-0,000020	-0,02	3
(4)	99,25	0,000237	0,008888	0,0047	0,52	0,001744	0,17	4
(5)	99,88	0,000509	0,013026	0,00827	1,15	-0,000671	-0,19	5
(6)	99,82	0,000800	0,016329	0,009328	1,08	0,002628	0,21	6
(7)	99,13	0,003876	0,035944	0,02265	3,83	-0,009418	-1,95	7



Hình 1. Đồ thị biểu diễn phân bố N/H của Rkn(1) và Rkn(2) được ước lượng từ 5 hàm phân bố khác nhau

Bảng 10. Các hàm ước lượng phân bố F(H) của Rkn (2)

Hàm	Biểu thức toán học của các hàm F(H)	
(1)	$F(H) = \exp(3,26862 - 0,823046 \times \ln(H) - 0,403937 \times (h/H_{Max})^{-2,18261})$	(15)
(2)	$F(H) = \exp(3,99907 - 0,54804 \times \sqrt{H} - 0,896 \times (h/H_{Max})^{-1,57448})$	(16)
(3)	$F(H) = \exp(3,45691 - 2,04853 \times (h/H_{Max}) - 1,41257 \times (h/H_{Max})^{-1,22603})$	(17)
(4)	$F(H) = (1 - 1,22851 \times \exp(-0,245644 \times H))^{33,7963}$	(18)
(5)	$F(H) = 1 - \exp(-((H - 8,59548)/-986349,0))^{-103647}$	(19)
(6)	$F(H) = 1 - (1 + (H/28,0089)^{4,36347})^{-6,203}$	(20)
(7)	$F(H) = (1 + \exp(-(H - 18,2616)/2,58027))^{-0,764493}$	(21)

3.2.2. Hàm phân bố chiều cao của rừng trồng Thông ba lá

Những phân tích hồi quy từ số liệu ở Bảng 3-5 cho thấy 7 hàm dự tuyển 1÷7 mô tả tốt phân bố F(H) của rừng trồng Thông ba lá 15, 20 và 28 tuổi (Bảng 12-17). Đối với rừng trồng Thông ba lá 15 tuổi, số liệu ở Bảng 13 cho thấy 7 hàm dự tuyển này đều nhận hệ số xác định rất cao; trong đó cao nhất ở hàm 3 ($R^2 = 99,97\%$), thấp nhất ở hàm 5 ($R^2 = 93,74\%$). Hai thống kê sai lệch nhận giá trị thấp nhất ở hàm 3 (SSE = 0,000210; SEE = $\pm 0,010239$), cao nhất ở hàm 5 (SSE = 0,043964; SEE = $\pm 0,121056$). Hàm 1 và 2 nhận sai số hệ thống âm (ME < 0), còn các hàm khác nhận sai số hệ thống dương (ME > 0). Giá

trị MAPE_{Min} xuất hiện ở hàm 2 (2,3%), còn MAPE_{Max} ở hàm 5 (34,7%). So với SSE của hàm 3, giá trị này ở hàm 2 khác nhau không đáng kể, còn hàm 1, 4, 5, 6 và 7 lớn hơn tương ứng 3,4 lần, 24,4 lần, 209,4 lần, 11,3 lần và 23,2 lần. Hình 2(a) biểu diễn sự khác biệt về hình dạng của đường cong phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá được ước lượng theo 4 hàm phân bố khác nhau. Theo tiêu chuẩn SSE_{Min} và SEE_{Min}, hàm 3 (Thêm 2025c) xếp hạng 1. Đây là hàm thích hợp để xây dựng hàm phân bố F(H) của rừng trồng Thông ba lá 15 tuổi. Mô hình ước lượng phân bố F(H) của rừng trồng Thông ba lá 15 tuổi có dạng như hàm 24.

Bảng 11. Sai lệch của 7 hàm ước lượng phân bố F(H) của Rkn (2)

Hàm	R ² (%)	SSE	±SEE	MAE	MAPE	ME	MPE	Hạng
(1)	99,42	0,005708	0,043619	0,023598	19,63	0,009112	16,47	5
(2)	99,60	0,003921	0,036151	0,019019	17,11	0,007357	14,50	4
(3)	99,68	0,003116	0,032229	0,017456	14,80	0,005793	12,38	3
(4)	99,17	0,008181	0,045225	0,030674	20,74	0,015794	17,07	6
(5)	90,26	0,095802	0,154760	0,110564	59,20	0,023454	18,04	7
(6)	99,91	0,000818	0,014301	0,007884	8,00	0,003631	6,98	2
(7)	99,99	0,000063	0,003961	0,002595	0,80	0,000901	0,49	1

Bảng 12. Bảy hàm ước lượng phân bố F(H) của rừng trồng Thông ba lá 15 tuổi

Hàm	Biểu thức toán học của các hàm F(H)	
(1)	$F(H) = \exp(17,6327 - 5,65395 \times \ln(H) - 1,61951 \times (h/H_{\text{Max}})^{-3,87793})$	(22)
(2)	$F(H) = \exp(1,88477 - 0,388517 \times \sqrt{H} - 0,281717 \times (h/H_{\text{Max}})^{-7,18153})$	(23)
(3)	$F(H) = \exp(0,967523 - 0,702191 \times (h/H_{\text{Max}}) - 0,264755 \times (h/H_{\text{Max}})^{-7,30976})$	(24)
(4)	$F(H) = (1 - 1150,83 \times \exp(-0,82476 \times H))^{58,8129}$	(25)
(5)	$F(H) = 1 - \exp(-(H - 12,0312)/3,98141)^{1,71289}$	(26)
(6)	$F(H) = 1 - (1 + (H/14,6004)^{14,6114})^{-1,51505}$	(27)
(7)	$F(H) = (1 + \exp(-(H - 8,04611)/1,20632))^{-92,3042}$	(28)

Bảng 13. Sai lệch của 7 hàm ước lượng phân bố F(H) của rừng trồng Thông ba lá 15 tuổi

Hàm	R ² (%)	SSE	±SEE	MAE	MAPE	ME	MPE	Hạng
(1)	99,89	0,000722	0,019006	0,010052	4,4	-0,00173	-2,9	3
(2)	99,96	0,000211	0,010277	0,005202	2,3	-0,00022	0,8	2
(3)	99,97	0,000210	0,010239	0,005221	2,4	0,00027	1,0	1
(4)	99,27	0,005127	0,0413	0,025278	11,1	0,01163	8,9	6
(5)	93,74	0,043964	0,121056	0,076745	34,7	0,01593	13,4	7
(6)	99,66	0,002374	0,028128	0,017103	7,9	0,00065	-5,2	4
(7)	99,31	0,004869	0,040287	0,024245	10,2	0,01149	8,1	5

Đối với rừng trồng Thông ba lá 20 tuổi, số liệu ở Bảng 15 cho thấy 7 hàm dự tuyển này đều nhận hệ số xác định rất cao; trong đó cao

nhất ở hàm 6 ($R^2 = 99,96\%$), thấp nhất ở hàm 5 ($R^2 = 90,48\%$). Hai thống kê sai lệch nhận giá trị thấp nhất ở hàm 6 (SSE = 0,000290; SEE =

$\pm 0,009827$), cao nhất ở hàm 5 ($SSE = 0,071338$; $SEE = \pm 0,154206$). Bảy hàm này đều nhận sai số hệ thống dương ($ME > 0$). Giá trị $MAPE_{Min}$ xuất hiện ở hàm 6 (1,8%), còn $MAPE_{Max}$ ở hàm 5 (45,1%). So với SSE của hàm 6, giá trị này ở hàm 1, 2 và 3 lớn hơn tương ứng 3,7 lần, 3,5 lần và 3,5 lần. Hình 2(b) biểu diễn sự khác biệt về hình dạng của đường cong phân bố N/H của rừng

trồng Thông ba lá 20 tuổi được ước lượng theo 4 hàm phân bố khác nhau. Theo tiêu chuẩn SSE_{Min} và SEE_{Min} , hàm 6 (Hàm Burr, 1942) xếp hạng 1. Đây là hàm thích hợp để xây dựng hàm ước lượng phân bố $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 20 tuổi. Mô hình ước lượng $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 20 tuổi có dạng như hàm 34.

Bảng 14. Bảy hàm ước lượng phân bố $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 20 tuổi

Hàm	Biểu thức toán học của các hàm $F(H)$	
(1)	$F(H) = \exp(17,9857 - 5,69522 \times \ln(H) - 1,21354 \times (h/H_{Max})^{-5,27843})$	(29)
(2)	$F(H) = \exp(12,7883 - 2,64946 \times \sqrt{H} - 1,23976 \times (h/H_{Max})^{-5,15232})$	(30)
(3)	$F(H) = \exp(5,93097 - 4,91643 \times (h/H_{Max}) - 1,01197 \times (h/H_{Max})^{-5,49684})$	(31)
(4)	$F(H) = (1 - 4763,23 \times \exp(-0,898611 \times H))^{275,056}$	(32)
(5)	$F(H) = 1 - \exp(-((H - 14,0689)/6,81437E6)^{2,81759E6})$	(33)
(6)	$F(H) = 1 - (1 + (H/17,6421)^{16,1782})^{-2,97844}$	(34)
(7)	$F(H) = (1 + \exp(-(H - 15,1823)/0,957998))^{-2,15193}$	(35)

Bảng 15. Sai lệch của 7 hàm ước lượng phân bố $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 20 tuổi

Hàm	$R^2(\%)$	SSE	$\pm SEE$	MAE	MAPE	ME	MPE	Hạng
(1)	99,86	0,001074	0,023176	0,010587	6,7	0,002910	5,0	4
(2)	99,87	0,001005	0,022414	0,009986	6,4	0,003868	4,9	2
(3)	99,86	0,001029	0,022677	0,010141	6,5	0,002728	4,8	3
(4)	98,69	0,009851	0,057304	0,037074	20,2	0,019001	16,1	6
(5)	90,48	0,071338	0,154206	0,103258	45,1	0,018844	13,1	7
(6)	99,96	0,000290	0,009827	0,005965	1,8	0,000962	-0,6	1
(7)	99,41	0,004401	0,038300	0,023836	9,8	0,007382	6,2	5

Bảng 16. Bảy hàm ước lượng phân bố $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 28 tuổi

Hàm	Biểu thức toán học của các hàm $F(H)$	
(1)	$F(H) = \exp(20,8742 - 6,45541 \times \ln(H) - 0,926505 \times (h/H_{Max})^{-6,51567})$	(36)
(2)	$F(H) = \exp(14,4659 - 2,71276 \times \sqrt{H} - 1,68676 \times (h/H_{Max})^{-4,35215})$	(37)
(3)	$F(H) = \exp(7,49832 - 6,22343 \times (h/H_{Max}) - 1,24263 \times (h/H_{Max})^{-5,20476})$	(38)
(4)	$F(H) = (1 - 12,7856 \times \exp(-0,463805 \times H))^{298,577}$	(39)
(5)	$F(H) = 1 - \exp(-((H - 16,1806)/0,0239051)^{0,00717872})$	(40)
(6)	$F(H) = 1 - (1 + (H/25,2066)^{17,0915})^{-105,712}$	(41)
(7)	$F(H) = (1 + \exp(-(H - 19,519)/0,509976))^{-0,425414}$	(42)

Đối với rừng trồng Thông ba lá 28 tuổi, số liệu ở Bảng 17 cho thấy 7 hàm dự tuyển này đều nhận hệ số xác định rất cao; trong đó cao nhất ở hàm 6 ($R^2 = 99,92\%$), thấp nhất ở hàm 4 ($R^2 = 89,01\%$). Hai thống kê sai lệch nhận giá trị thấp nhất ở hàm 6 ($SSE = 0,000772$; $SEE = \pm 0,013894$), cao nhất ở hàm 4 ($SSE = 0,110280$; $SEE = \pm 0,166042$). Hàm 1, 4 và 5 nhận sai số hệ thống dương ($ME > 0$), còn các hàm khác nhận

sai số âm ($ME < 0$). Giá trị $MAPE_{Min}$ xuất hiện ở hàm 6 (3,1%), còn $MAPE_{Max}$ ở hàm 5 (57,1%). So với SSE của hàm 6, giá trị này ở hàm 1, 2 và 3 lớn hơn tương ứng 5,7 lần, 15,8 lần và 8,0 lần. Hình 2(c) biểu diễn sự khác biệt về hình dạng của đường cong phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá 28 tuổi được ước lượng theo 4 hàm phân bố khác nhau. Theo tiêu chuẩn SSE_{Min} và SEE_{Min} , hàm 6 (Hàm Burr, 1942) xếp hạng 1. Đây

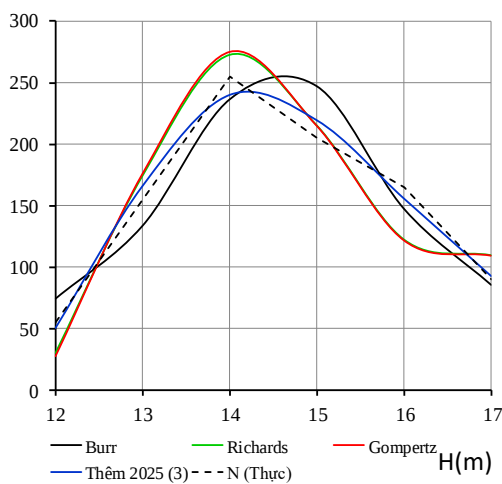
là hàm thích hợp để xây dựng hàm ước lượng phân bố $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 28

tuổi. Mô hình ước lượng $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 28 tuổi có dạng như hàm 41.

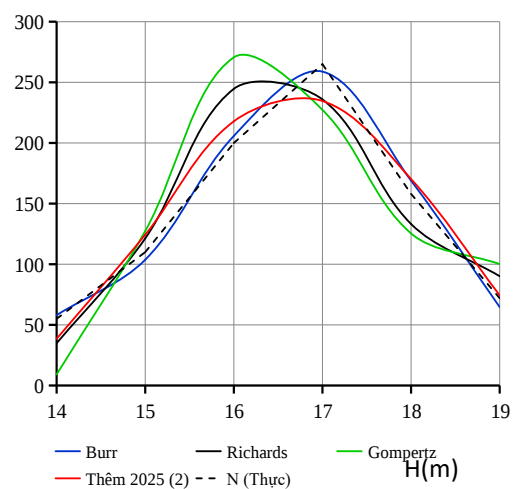
Bảng 17. Sai lệch của 7 hàm ước lượng phân bố $F(H)$ của rừng trồng Thông ba lá 28 tuổi

Hàm	$R^2(\%)$	SSE	$\pm SEE$	MAE	MAPE	ME	MPE	Hạng
(1)	99,56	0,004380	0,038209	0,019683	14,2	0,012055	12,9	3
(2)	98,78	0,012211	0,063799	0,033849	10,3	-0,011432	-7,7	5
(3)	99,38	0,006211	0,045502	0,024535	9,6	-0,004468	0,9	4
(4)	89,01	0,110280	0,166042	0,112379	49,4	0,026150	-34,7	7
(5)	92,59	0,074380	0,136363	0,080245	57,1	0,002922	16,6	6
(6)	99,92	0,000772	0,013894	0,008934	3,1	-0,001739	-1,4	1
(7)	99,90	0,001005	0,015848	0,010248	7,1	-0,000853	-4,6	2

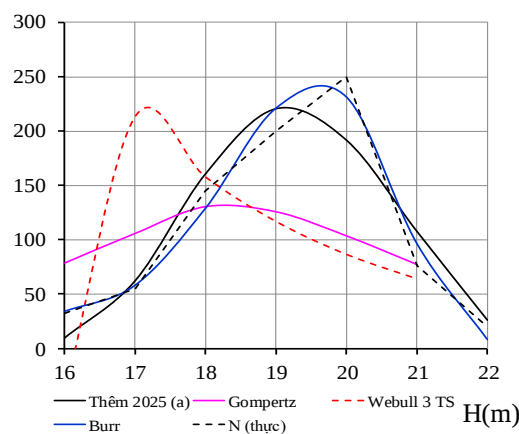
Rừng Thông ba lá 15 tuổi (N , cây/ha) (a)



Rừng Thông ba lá 20 tuổi (N , cây/ha) (b)



Rừng Thông ba lá 28 tuổi (N , cây/ha) (c)



Hình 2. Đồ thị biểu diễn phân bố N/H của rừng trồng Thông ba lá ở tuổi 15, 20 và 28 năm được ước lượng bằng những hàm phân bố khác nhau

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này phát triển ba hàm mới để ước lượng phân bố chiều cao của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi. Từ giả thuyết đường cong phân bố $F(H)$ của rừng

tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi có dạng hàm số mũ, nghiên cứu này đề xuất ba hàm $F(H)$ mới: (1) $F(H) = \exp(a + b \times \ln(H) + c \times (h/H_{\text{Max}})^d)$; (2) $F(H) = \exp(a + b \times \sqrt{H} + c \times (h/H_{\text{Max}})^d)$; (3) $F(H) = \exp(a + b \times (h/H_{\text{Max}}) +$

$c \times (h/H_{\text{Max}})^d$). Ưu điểm của ba hàm $F(H)$ mới này được so sánh với 4 hàm phân bố của Gompertz 3 tham số (1825), Weibull 3 tham số, Burr (1942) và Richards (1980). Nói chung, không có hàm phân bố nào trong số 7 hàm dự tuyến mô tả tốt nhất phân bố N/H của rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi. Khi phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch phải, ba hàm mới này phù hợp hơn so với 4 hàm Gompertz 3 tham số, Weibull 3 tham số, Burr và Richards. Khi phân bố N/H có dạng 1 đỉnh lệch trái hoặc gần đối xứng, ba hàm mới này kém phù hợp hơn so với hàm Burr và Richards, nhưng vẫn tốt hơn so với 2 hàm Gompertz 3 tham số và Weibull 3 tham số. Ưu điểm của 3 hàm mới này là các tham số của chúng được xác định dễ dàng bằng phương pháp hồi quy tuyến tính và hồi quy phi tuyến tính. Nhóm tác giả kiến nghị các nhà lâm học và điều tra rừng có thể áp dụng 3 hàm phân bố $F(H)$ mới này để xác định hàm phân bố N/H thích hợp đối với rừng tự nhiên hỗn loài và rừng trồng thuần loài đồng tuổi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Thái Văn Trường (1999). Những hệ sinh thái rừng nhiệt đới ở Việt Nam. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [2]. Kimmins J. P. (1998). Forest ecology. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey. 750.
- [3]. Nguyễn Văn Thêm & Phạm Minh Toại (2024). Sinh thái rừng. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [4]. Nguyễn Văn Trương (1984). Quy luật cấu trúc rừng gỗ hỗn loài. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [5]. Nguyễn Hải Tuất & Nguyễn Trọng Bình (2004). Khai thác và sử dụng SPSS để xử lý số liệu nghiên cứu trong lâm nghiệp. NXB Nông nghiệp, Hà Nội.
- [6]. Gompertz B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 115: 513-583. DOI: 10.1098/rstl.1825.0026. S2CID 145157003.
- [7]. Burr I. M. (1942). Cumulative frequency functions. Annals of Mathematical Statistics. 13(2): 215-232. DOI: 10.1214/aoms/1177731607. JSTOR 2235756.
- [8]. Nguyễn Văn Thêm (2017). Mô hình hóa phân bố đường kính của rừng trồng Thông ba lá (*Pinus keisiya* Royle ex Gordon) trên cấp đất II dựa trên hàm phân bố Weibull và Richards. Tạp chí Khoa học Lâm nghiệp. 1: 42-50.
- [9]. Duan A. G., Zhang J. G. & Tong S.Z. (2006). Application of R-distribution to model cumulative distribution of basal area of stands in Chinese fir plantations. Journal of Beijing Forestry University. 28(3): 86-94.
- [10]. Nguyễn Văn Thêm, Đào Thị Thùy Dương, Trần Thị Ngoan & Nguyễn Xuân Hùng (2021). Những cách thức và phương pháp xử lý số liệu trong lâm học. NXB Nông nghiệp, Hà Nội.
- [11]. Renato L., Jiao L. F. B. & Paulo I. P. (2015). Modeling tree diameter distributions in natural forests: An evaluation of 10 statistical models. Forest Science. 61(2): 320-327. DOI: 10.5849/forsci.14-070.
- [12]. Đào Thị Thùy Dương (2019). Đặc điểm sinh thái tái sinh của Dầu con rái (*Dipterocarpus alatus* Roxb) dưới tán rừng kín thường xanh ẩm nhiệt đới ở khu vực Tân Phú thuộc tỉnh Đồng Nai. Luận án tiến sĩ lâm nghiệp, Trường Đại học Nông Lâm TP. Hồ Chí Minh.
- [13]. Lê Văn Long (2019). Đặc điểm lâm học của những loại hình quần xã thực vật thuộc kiểu rừng kín thường xanh ẩm nhiệt đới ở khu vực Tân Phú thuộc tỉnh Đồng Nai. Luận án tiến sĩ lâm nghiệp, Trường Đại học Nông Lâm TP. Hồ Chí Minh.
- [14]. Lê Hồng Việt (2021). Đặc điểm tái sinh tự nhiên của Sến mủ (*Shorea roxburghii* G.Don) dưới tán rừng kín thường xanh hơi ẩm nhiệt đới ở khu vực Tân Phú, tỉnh Đồng Nai. Luận án tiến sĩ lâm nghiệp, Trường Đại học Lâm nghiệp.