



ĐẠI HỌC NÔNG LÂM TP. HCM
KHOA CƠ KHÍ – CÔNG NGHỆ



CƠ KỸ THUẬT: TĨNH HỌC & ĐỘNG LỰC HỌC **(CƠ HỌC LÝ THUYẾT: Bài tập & Hướng dẫn)**

Biên soạn: VƯƠNG THÀNH TIÊN

Email: tienvuong.uaf@gmail.com; mobile: 03 999 333 56

Tp. HCM, 03/2019

Thông tin cần thiết về môn học:

1. Phân bố điểm môn học

- Đánh giá về chuyên cần - tích cực trong học tập **(1,0^d)**

Môn học gồm 15 buổi học x 3 tiết/buổi = 45 tiết (3 TC)

- Vắng 1 buổi, vẫn được 1,0đ.
- Vắng 2 buổi, 0,5đ.
- Vắng 3 buổi, 0.0đ
- Vắng 4 buổi, cấm thi.

- Điểm bài tập (bắt buộc) **(1,5^d)**

- Phần Tĩnh học (0,5^d)
- Phần Động học (0,5^d)
- Phần Động lực học (0,5^d)

- Điểm kiểm tra tại lớp phần Tĩnh học **(1,5^d)**

Điểm thi kết thúc môn học **(6,0^d)**

2. Nội dung thi kết thúc môn

- Một bài toán về Động học (2,0^d)
- Hai bài toán về Động lực học (2,0 + 2,0 = 4,0^d)

3. Tất cả những ví dụ sẽ được cho ghi chép & giảng giải tại lớp. Sinh viên **NÊN** đến lớp thường xuyên mới có hy vọng nắm được bài & giải được bài tập.

4. Sinh viên phải giải tất cả những bài tập trong phần sau đây & nộp lại cho giảng viên vào buổi học cuối cùng.

BÀI TẬP PHẦN 1: ÔN TẬP VÉC TƠ & TÍNH HỌC

Bài 1: Trong hệ Oxyz, cho véc tơ $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ (đơn vị dài). Hãy vẽ véc tơ \vec{r} theo hai cách:

- a) Dựa vào các thành phần của \vec{r}
- b) Dựa vào độ lớn và các góc chỉ phương của \vec{r}

Bài 2: Trong hệ Oxyz, một chất điểm tại O chịu tác dụng của 3 lực:

$$\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \vec{F}_2 = -10\vec{j}; \quad \vec{F}_3 = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} \text{ (N)}.$$

Hãy xác định véc tơ tổng của các lực tác dụng lên chất điểm đó.

Bài 3: Hai lực \vec{F}_1 và \vec{F}_2 tác dụng lên một vật rắn. Biết các véc tơ tổng của chúng là $\vec{F} = 2\vec{i}$. Nếu $\vec{F}_2 = 10\vec{i} - 10\vec{j}$.

- a) Hãy xác định véc tơ \vec{F}_1 .
- b) Hãy vẽ véc tơ \vec{F}_1, \vec{F}_2 và \vec{F} trong hệ Oxy.

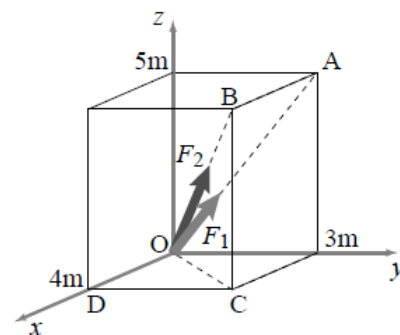
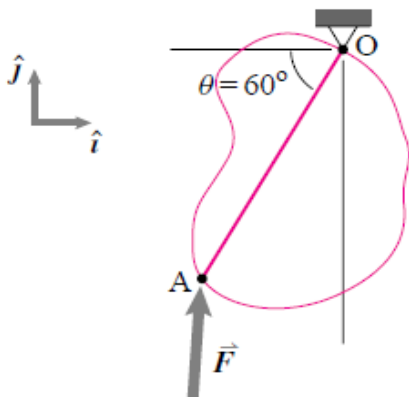
Bài 4: Trong hệ Oxyz, chất điểm P có tọa độ (3, 2, 1) (m). Hãy xác định véc tơ vị trí \vec{r}_p theo 2 cách (tương tự bài 1) và vẽ chúng trong hệ tọa độ Oxyz.

Bài 5: Hai véc tơ \vec{a} và \vec{b} trong hệ Oxy được xác định bởi: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$. Gọi θ là góc giữa 2 véc tơ.

- a) Hãy xác định góc θ , biểu thị \vec{a} và \vec{b} trong hệ Oxy.
- b) Hãy xác định véc tơ $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ theo 2 cách:
 - Dựa vào định nghĩa tích hữu hướng.
 - Dựa vào thành phần của véc tơ \vec{c}

Bài 6: Lực $\vec{F} = \vec{i} + 20\vec{j}$ (N) tác dụng lên một thanh treo (như hình vẽ).

Hãy xác định véc tơ mô men của lực \vec{F} đối với tâm O. Biết $OA = \ell = 1 \text{ m}$

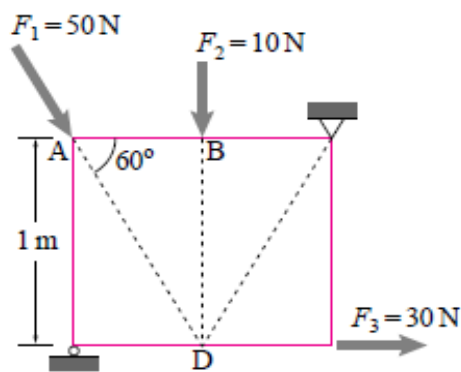


Hình 7

Bài 7: Khối hình chữ nhật có kích thước 4m x 3m x 5m chịu tác dụng của lực \vec{F}_1 nằm dọc theo OA có độ lớn 5 (N), \vec{F}_2 nằm dọc theo OB có độ lớn 7 (N), hình 7.

- Hãy xác định \vec{F}_1, \vec{F}_2 theo các thành phần của nó.
- Hãy xác định góc \widehat{AOB} giữa 2 véc tơ.
- Xác định mô men của lực \vec{F}_1 đối với điểm D.
- Xác định mô men của lực \vec{F}_1 đối với trục DC.

Bài 8:

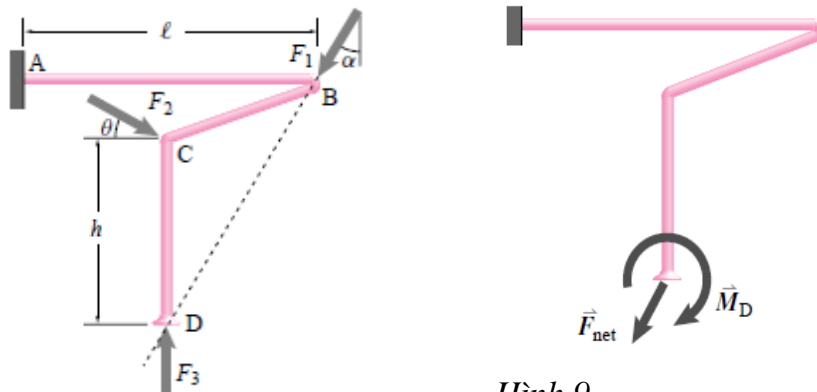


Hình 8

Hệ lực ($\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$) tác dụng lên một khung, có phương, chiều và độ lớn được thể hiện trong hình 8.

Nếu chọn D làm tâm thu gọn. Hãy xác định: Véc tơ chính \vec{R} và mô men chính \vec{M}_D

Bài 9: Cho hệ lực không gian ($\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$) tác dụng lên một cấu trúc cơ khí, hình 9.



Hình 9

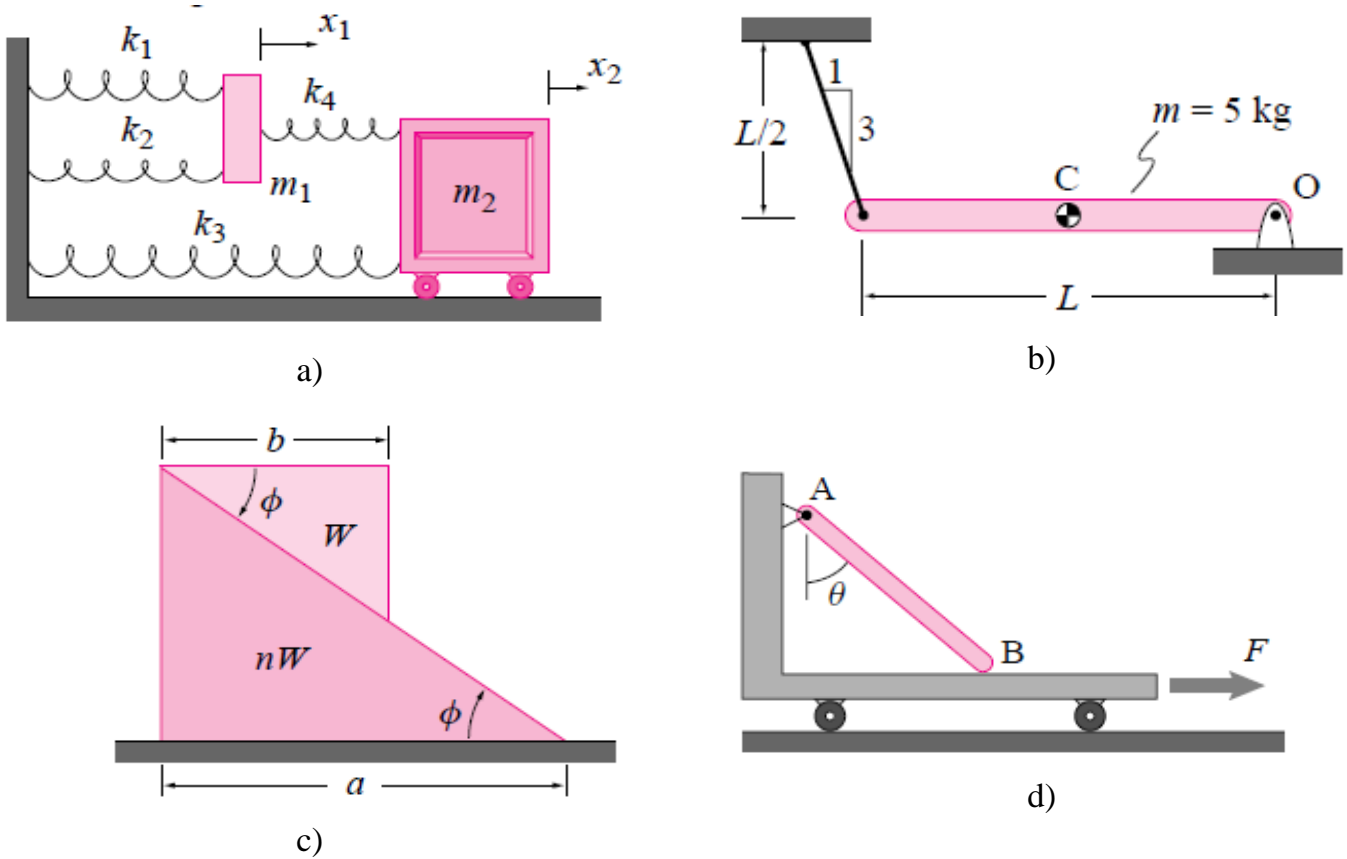
Biết: \vec{F}_1 có độ lớn là 100N, hợp với phương thẳng đứng 1 góc $\alpha = 30^\circ$

\vec{F}_2 có độ lớn là 50N nằm trong mp ngang, hợp với phương ngang 1 góc $\theta = 60^\circ$

\vec{F}_3 có độ lớn là 30N dọc theo phương CD, $\ell = 1\text{ m}$ và $h = 0,5\text{ m}$.

Nếu thu gọn hệ lực về D. Hãy xác định véc tơ chính \vec{R} và mô men chính \vec{M}_D

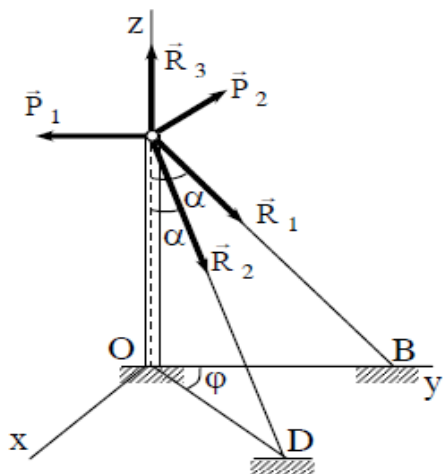
Bài 10: Hãy vẽ sơ đồ chịu lực (FBD) của mỗi vật rắn trong cơ hệ và toàn bộ cơ hệ tương ứng với các hình 10a, b, c, d.



Hình 10

Chú ý: - Trong hình 10a: bỏ qua khối lượng của lò xo
 - Trong hình 10b: bỏ qua khối lượng của thanh treo.

Bài 11: Cột điện OA được chôn thẳng đứng trên mặt đất (mp Oxy) và được giữ bởi 2 sợi cáp AB và AD hợp với cột điện 1 góc $\alpha = 30^\circ$; góc giữa OB và OD là $\varphi = 60^\circ$ như hình 11.

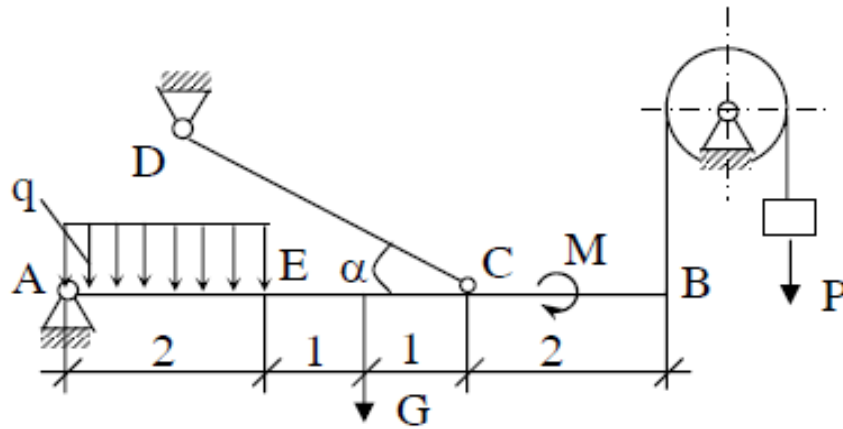


Tại đầu A của cột điện có 2 nhánh dây điện mắc song song với trục Oy và Ox. Các nhánh dây này chịu lực kéo là \vec{P}_1, \vec{P}_2 ; $P_1 = P_2 = 100\text{N}$. Hãy xác định:

- Lực tác dụng dọc theo cột điện.
- Lực trong các sợi cáp AB và AD.

Hình 11

Bài 12: Dầm AB được giữ nằm ngang nhờ các liên kết như hình 12.

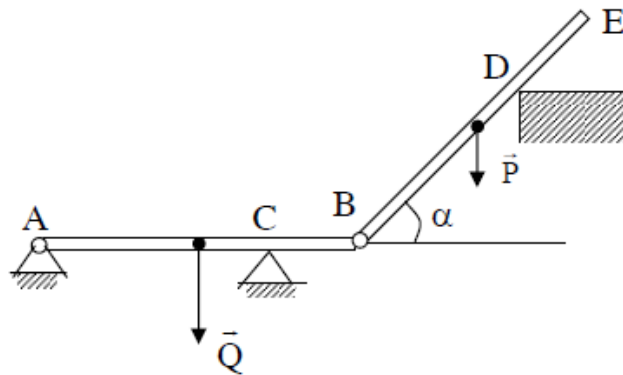


Hình 12

Trong đó, A là gối tựa cố định, thanh treo CD nghiêng 1 góc $\alpha = 30^\circ$ so với dầm. Tại đầu B có dây (kéo) thẳng đứng được vắt qua 1 ròng rọc; đầu dây có treo vật $P = 5 \text{ kN}$. Giả sử dầm có trọng lượng $G = 10 \text{ KN}$ đặt tại điểm giữa của AB. Bỏ qua khối lượng của thanh treo CD. Ngẫu lực $M = 8 \text{ kNm}$ có mp tác dụng là mp hình vẽ, có chiều tác dụng như hình vẽ. Trong đoạn AE, dầm chịu tác dụng của lực phân bố đều có cường độ $q = 0,5 \text{ kN/m}$.

Hãy xác định phản lực liên kết tại A và C.

Bài 13: Hệ dầm AB và BC được nối với nhau bằng khớp bản lề B. Đầu A có liên kết gối cố định; C và D là các điểm tựa nhón như hình vẽ.

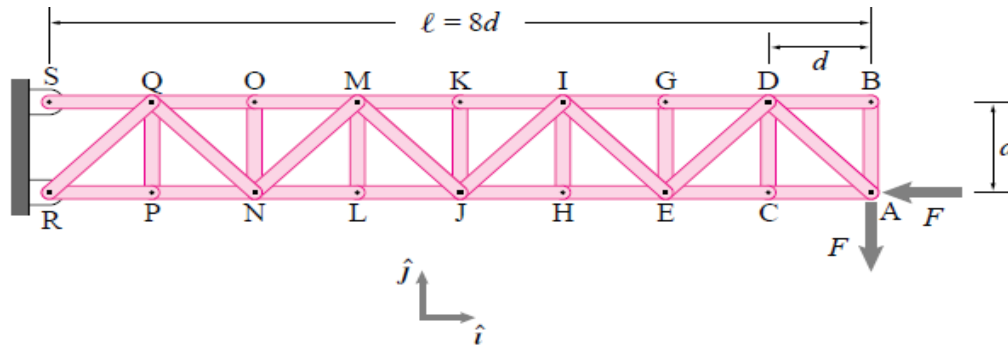


Hình 13

Biết: $CB = \frac{1}{3}AB$; $DE = \frac{1}{3}BE$; $\alpha = 45^\circ$. Trọng lượng $Q = 20 \text{ kN}$ và $P = 40 \text{ kN}$ đặt tại điểm giữa của dầm AB và BE.

Hãy xác định phản lực tại gối đỡ A và tại các điểm tựa C và D.

Bài 14: Cho 1 giàn phẳng chịu lực, hình 14. Hãy xác định:



Hình 14

- Các phản lực liên kết tại S và R.
- Ứng lực trong các thanh KM, JM và JL bằng phương pháp mặt cắt.

Bài 15:

15.1: Thanh có chiều dài $\ell = 4$ m tựa vào 1 bức tường thẳng đứng và hợp với nền 1 góc $\theta = 60^\circ$ như hình vẽ.

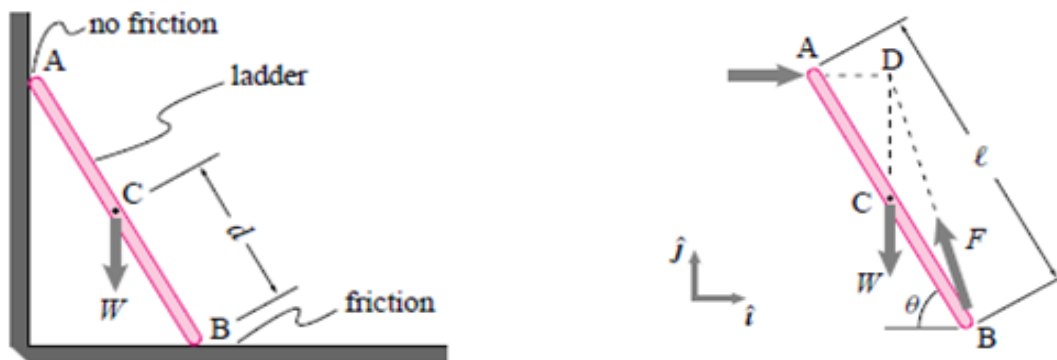
Giả sử không có ma sát giữa thang và tường. Hệ số ma sát giữa thang và nền là $\mu = 0,5$. Một người có trọng lượng 700N bắt đầu leo lên thang.

a) Người này có thể leo đến đỉnh thang an toàn không? Nếu không, hãy tìm khoảng cách d (dọc theo thang) để leo an toàn trong đoạn đó. Bỏ qua trọng lượng của thang.

b) Khoảng cách d phụ thuộc vào θ ? Nếu như vậy, xác định góc θ để người đó leo lên an toàn đến đỉnh thang.

15.2: Giả sử có thêm hệ số ma sát giữa thang và tường đứng là $f = 0,4$

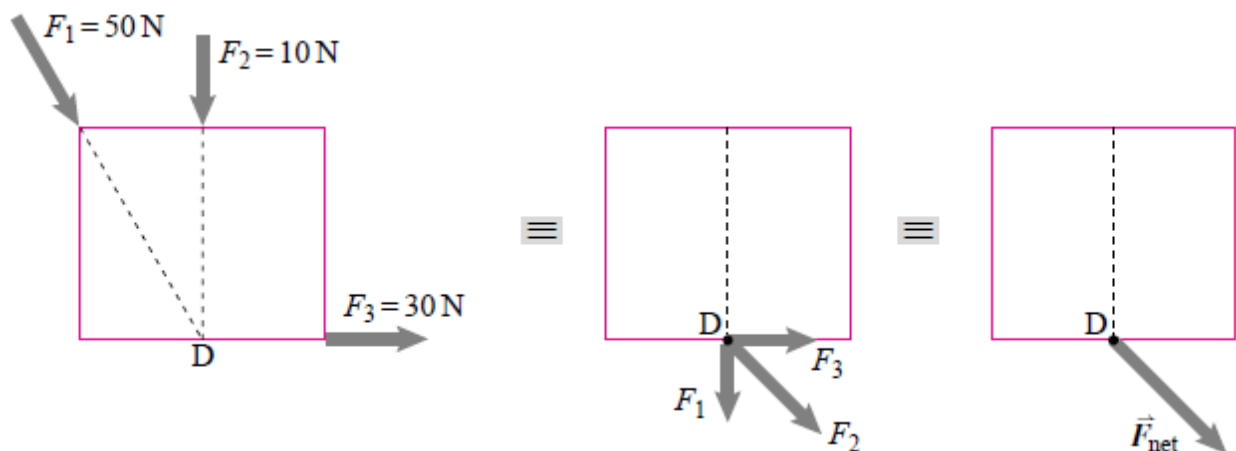
- Hãy xác định phản lực liên kết tại A và B.
- Xác định góc θ để người đó có thể leo an toàn từ B đến A.



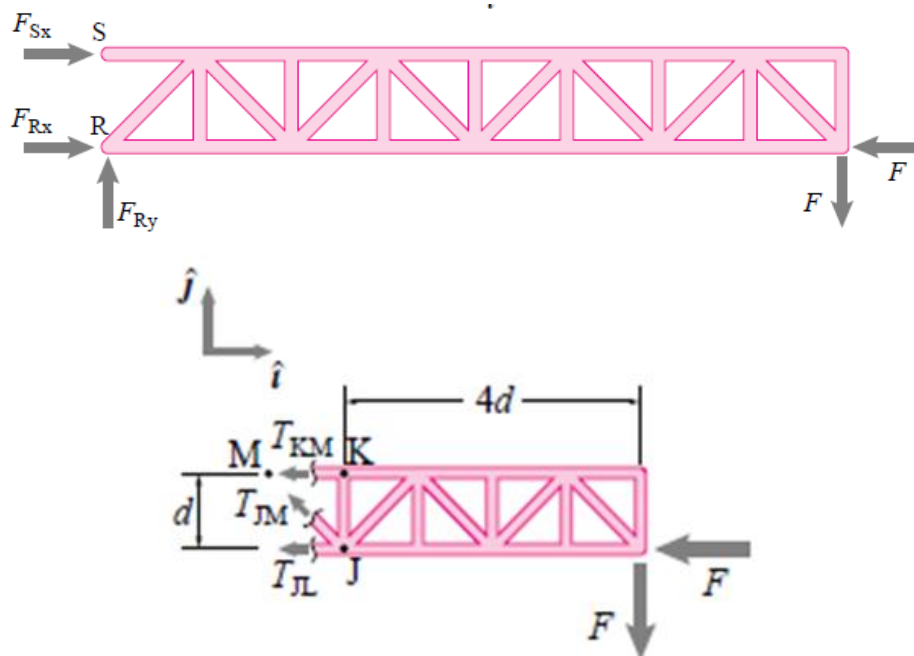
Hình 15

Hình hướng dẫn một số bài tập

Bài 8:



Bài 14:



Hướng dẫn & đáp số

Bài 1: Tham khảo các file “0.5 Vector Decomposition into Component” & “0.6 Going between Representation” trước khi giải các bài tập 1, 2, 3, và 4.

Bài 2: $\vec{F} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k}$, thể hiện nó trong hệ Oxyz

Bài 3: $\vec{F}_1 = -8\vec{i} + 10\vec{j}$

Bài 4: $\vec{r}_p = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, thể hiện nó trong hệ Oxyz

Bài 5: Thể hiện \vec{a} , \vec{b} trong Oxyz; $\vec{c} = 8\vec{k}$

Bài 6: $\vec{M}_O(F) = \left(-10 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{k} = -9,13\vec{k}$

Bài 7:

a) $\vec{F}_1 = \frac{5}{\sqrt{34}}(3\vec{j} + 5\vec{k})$ (N); $\vec{F}_2 = \frac{7}{\sqrt{50}}(4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k})$ (N)

b) $\widehat{AOB} = \theta = 34,45^\circ$

c) $\vec{M}_D(\vec{F}_1) = \vec{r}_{D0} \times \vec{F}_1 = \left(\frac{100}{\sqrt{34}}\vec{j} - \frac{60}{\sqrt{34}}\vec{k}\right)$ (N.m)

d) $M_{DC}(\vec{F}_1) = 5 \times 4 = 20$ (N.m)

Bài 8:

$\vec{R} = \vec{F}_{net} = 55\vec{i} - 53,3\vec{j}$ (N); $\vec{M}_D = 0$

Bài 9:

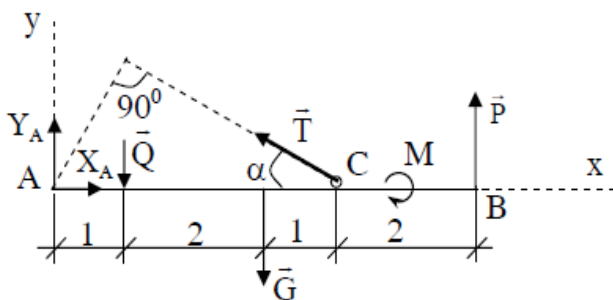
$\vec{R} = \vec{F}_{net} = -25\vec{j} - 99,9\vec{j}$ (N)

$\vec{M}_D = -12,5\vec{k}$ (N.m)

Bài 11:

$R_1 = 85$ kN; $R_2 = 231$ kN và $R_3 = 273$ kN

Bài 12:

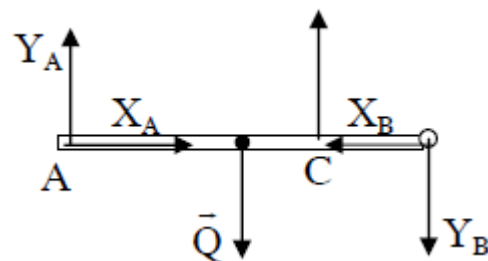
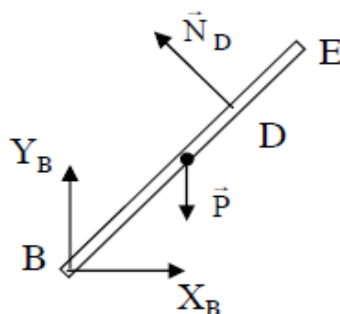


$X_A = 3,9$ (kN)

$Y_A = 3,75$ (kN)

$T = 4,5$ (kN)

Bài 13:



$X_A = 15$ (kN); $Y_A = -7,5$ (kN); $N_D = \frac{3}{4} \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 21,2$ (kN); $N_C = 52,5$ (kN)

Bài 14:

Bỏ qua trọng lượng của các thanh, FBD của dầm như hình vẽ

Chú ý: tại S chỉ có \vec{F}_{Sx} đi qua SQ (2 khớp bản lề ở 2 đầu thanh)

a) Gọi ý:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow F_{Ry}; \sum M_S = 0 \Rightarrow F_{Rx}; \sum M_R = 0 \Rightarrow F_{Sx}$$

$$F_{Rx} = 9F; F_{Ry} = F; F_{Sx} = -8F$$

b) Dùng phương pháp mặt cắt, xuất hiện các ứng lực \vec{T}_{KM} ; \vec{T}_{JM} và \vec{T}_{JL} , FBD của phần bên phải như hình vẽ

$$T_{RM} = 4F; T_{JL} = -6F; \text{ và } T_{JM} = \sqrt{2}F$$

$$\text{Gọi ý: } \sum M_J = 0; \sum M_M = 0$$

$$\text{hay } (\sum X = 0); \sum Y = 0$$

Bài 15:

$$15.1: \text{ a) } d = 3,46 \text{ m; b) } \theta \geq 64^\circ$$

$$15.2: \text{ a) \& b)}$$

Sẽ giảng giải tại lớp như là 1 ví dụ về bài toán ma sát.

PROBLEMS

General problem: Content of Course

Based on files “2_Content_IntroductionEngineeringMechanics”, answer the following questions:

- a) What make *Engineering* different from *Science*?
- b) What is *Engineering Mechanics*?
- c) What are the *major topics of the Course* (Introduction to Engineering Mechanics – Statics)?

Problem 1: Convert each of the following to three significant figures:

- (a) 20lb.ft to N.m, (b) 450lb/ft³ to kN/m³, and (c) 15 ft/h to mm/s.

Problem 2: Determine the position vector \mathbf{r} directed from point A to point B and the length of cord AB and its coordinate direction angles, Figure 2. Take $z = 4\text{m}$.

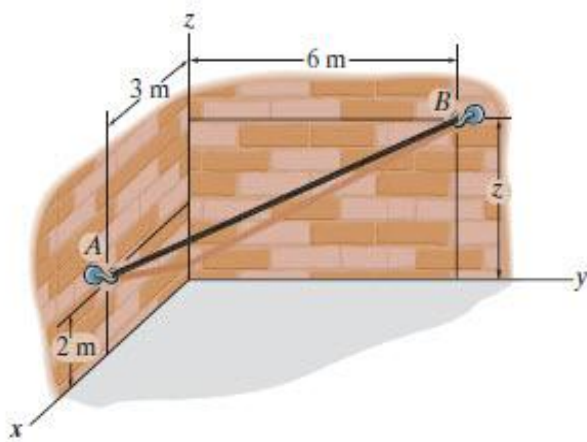


Figure 2

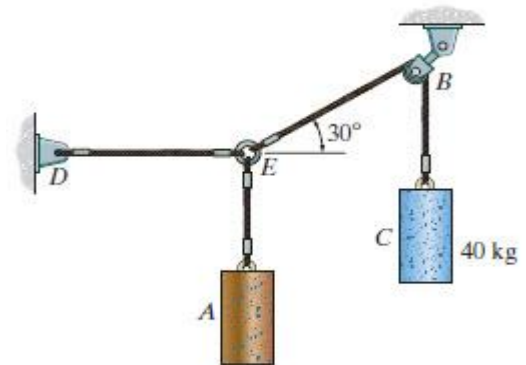


Figure 3

Problem 3: If the mass of cylinder C is 40 kg, determine the mass of cylinder A in order to hold the assembly in the position shown, Figure 3.

Problem 4: How much force must the person exert to hold the system in equilibrium?

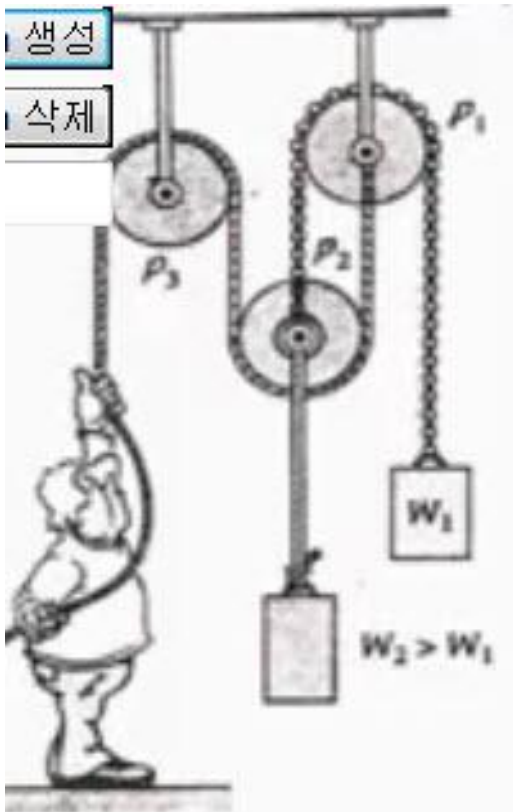


Figure 4

In which W_1 & W_2 are weight of cylinder 1 & 2, Figure 4.

Assume:

- Frictionless bearings
- Tension in cable/ belt/ rope is the same throughout
- Neglect pulley weights (P_1 , P_2 , & P_3)

(Figure 4)

Problem 5: Determine the components of reaction at the fixed support A, Figure 5. Neglect the thickness of beam.

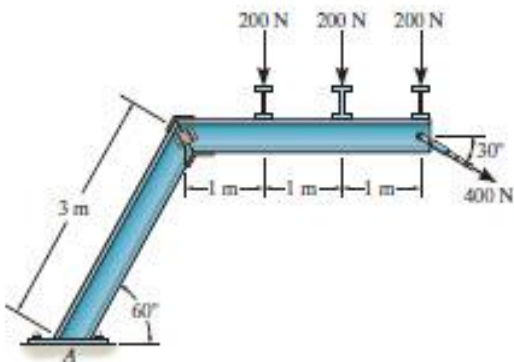


Figure 5

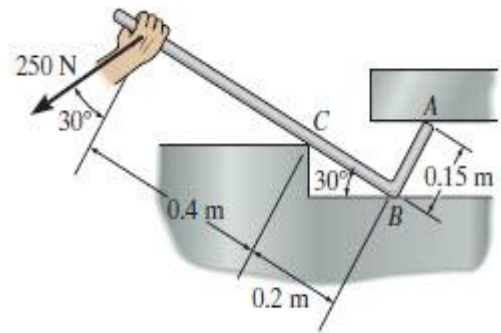


Figure 6

Problem 6: Determine the reactions at the smooth contact points A, B, and C on the bar, Figure 6.

Problem 7: Determine the horizontal and vertical components of reaction at the pin A and the tension developed in the cable BC used to support the steel frame, Figure 7.

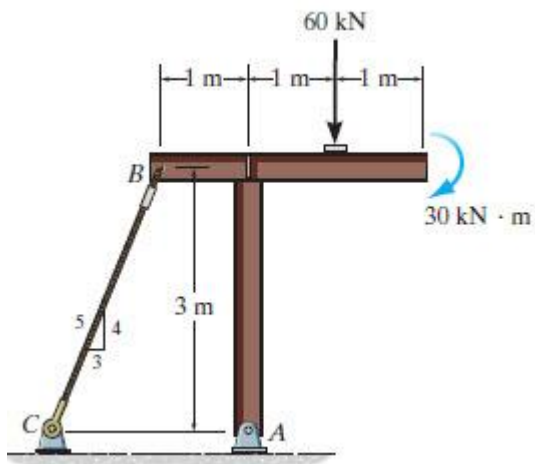


Figure 7

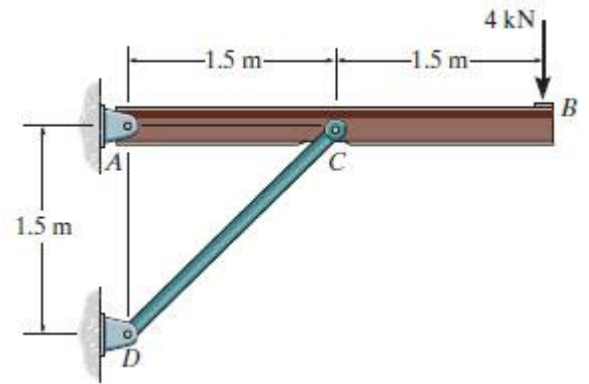
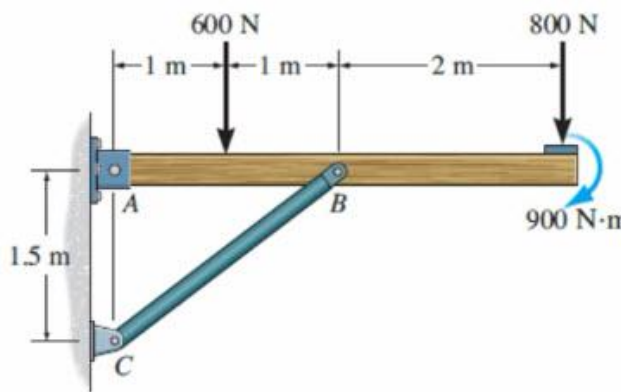


Figure 8

Problem 8: Determine the horizontal and vertical components of reaction at the pin A and the reaction on the beam at C, Figure 8.

Problem 9:



Determine the reactions at A and B on the beam
(Neglect weight of member BC)

Figure 9

Problem 10: For the frame structure shown in Figure 10, a 150N force is applied to the pin at B. It can be considered that the weight of the members of the structure to be negligible when compared to the other forces exerted in the structure. Find the forces exerted by the pin at B onto member ABD.

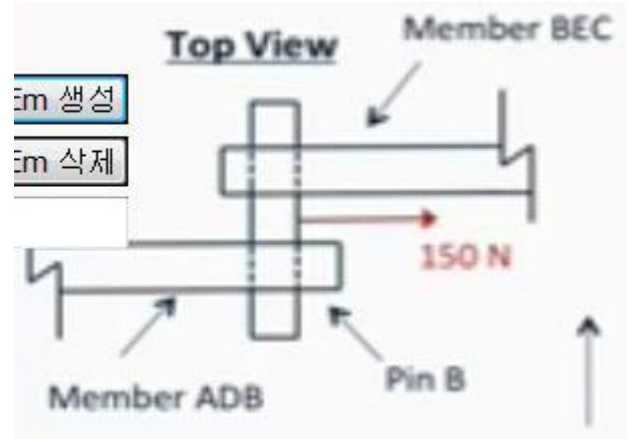
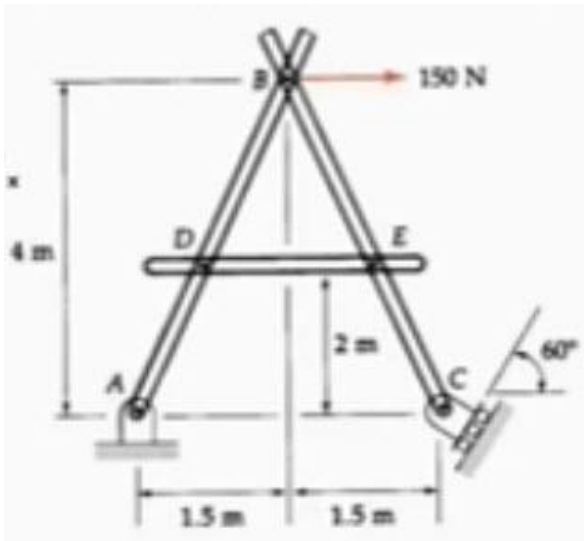


Figure 10

Problem 11: The 10lb forces are applied to the handles of the pliers shown in Figure 11. Determine the force on the nut and forces acting on the pin at A.

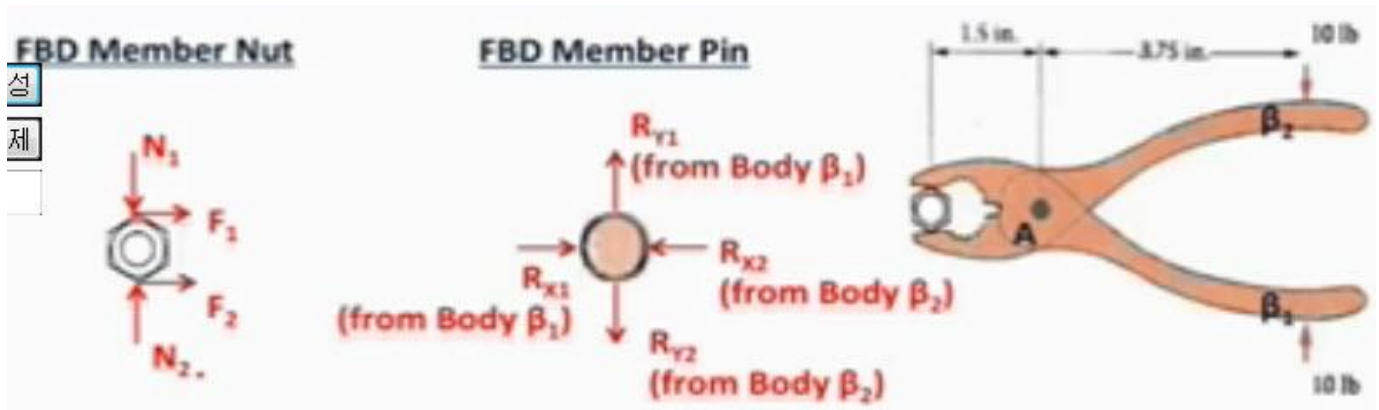


Figure 11

Problem 12:

Problem 12.1: Find the forces in each member of the truss, using the method of joints.

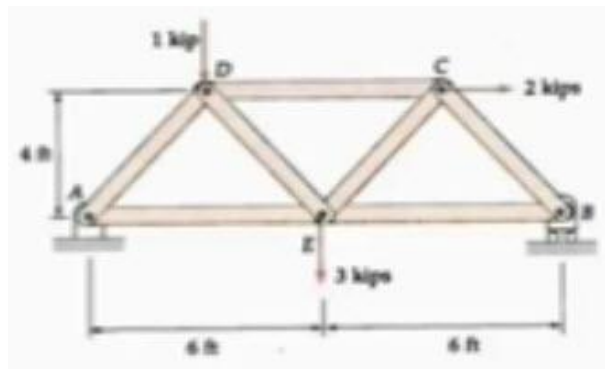


Figure 12.1

Note: kip is an Imperial unit of force; 1 kip = 1000 pound-force = 4448.2216 N = 4.4482216 kN

Problem 12.2: Determine the force in member GH of the truss, Figure 12.2, using the method of sections.

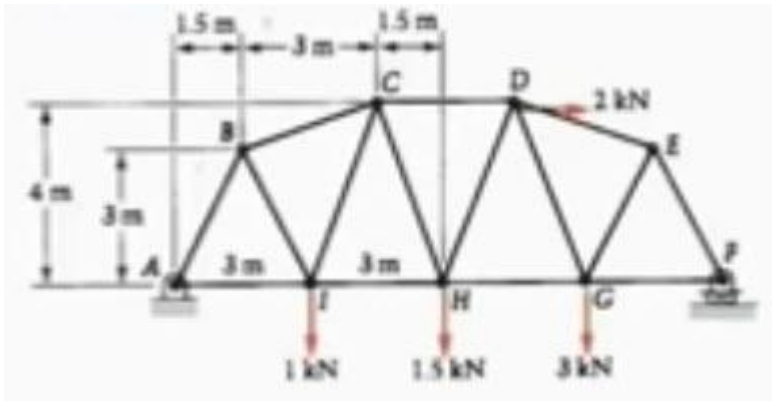


Figure 12.2

ANSWERS:

Answer 2: $\mathbf{r}_{AB} = \{-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\} \text{ m}$; $r_{AB} = 7 \text{ m}$

Answer 3: $m_A = 20 \text{ kg}$

Answer 4: see video clip (file "10_Example_System of Particle Equilibrium")

Answer 5: $A_x = 346 \text{ N}$; $A_y = 800 \text{ N}$, $M_A = 3.9 \text{ kNm}$

Answer 6: $N_C = 433 \text{ N}$; $N_A = 577.4 \text{ N}$; $N_B = 327 \text{ N}$

Answer 7: $T = 34.62 \text{ kN}$; $A_x = 20.8 \text{ kN}$; $A_y = 87.7 \text{ kN}$

Answer 8: $F_{CD} = 11.3 \text{ kN}$; $A_x = -8 \text{ kN}$, $A_y = -4 \text{ kN}$

Answer 9: see video clip (files "11_Example_2D Rigid Body Equilibrium" & "12_Force Member and Multi Force Members")

Answer 10: see video clip (file "13_Frame Structure")

Answer 11: see video clip (file "14_Machine Structure")

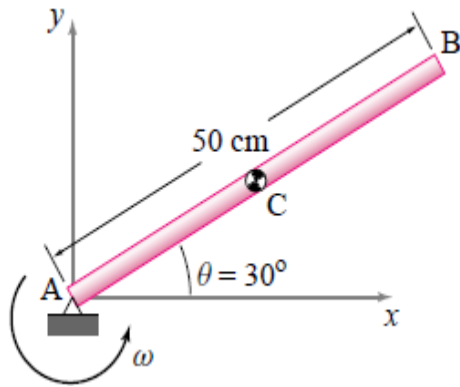
Answer 12:

Answer 12.1: see video clip (files "15_Truss Structures" & "16_Truss Method of joints")

Answer 12.2: see video clip (file "17_Truss Method of Section")

BÀI TẬP PHẦN 2: ĐỘNG HỌC

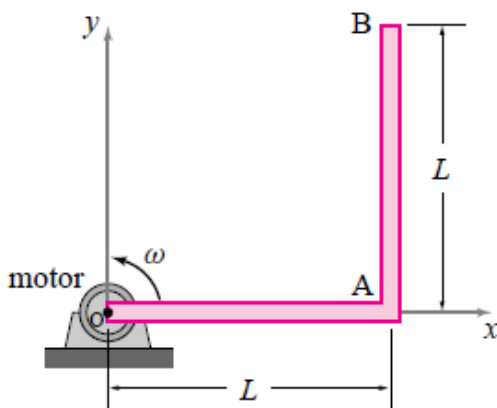
Bài 1: Một thanh đồng chất AB có chiều dài $l = 50$ cm quay quanh Az như hình vẽ. Tại thời điểm khảo sát, thanh quay chậm dần đều với gia tốc góc $\alpha = 0,1 \text{ rad/s}^2$.



a) Vận tốc điểm C (điểm giữa AB) là $v_C = 7,5 \text{ cm/s}$. Hãy xác định: Vận tốc góc của thanh; vận tốc điểm B trên thanh.

b) Xác định gia tốc góc của thanh và gia tốc của điểm B.

Bài 2: Motor dẫn động cho thanh OAB quay quanh trục đi qua O. Tại thời điểm khảo sát thanh đang ở vị trí như hình vẽ, có vận tốc góc $\omega = 4,0 \text{ rad/s}$ và quay chậm dần đều với gia tốc góc $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$.

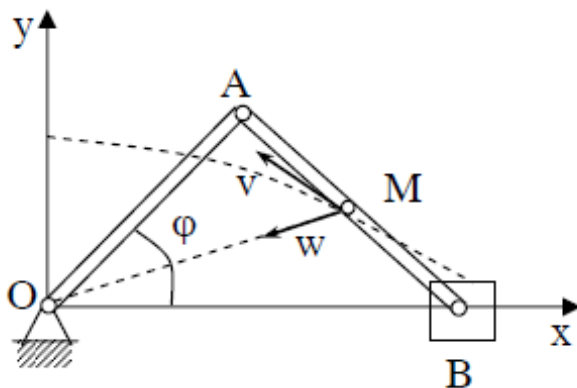


Biết: $L = 0,5m$. Hãy xác định:

a) Vận tốc của điểm A, điểm B và vận tốc tương đối của B so với A.

b) Gia tốc của điểm A, điểm B và gia tốc tương đối của B so với A.

Bài 3: Cho cơ hệ gồm thanh OA, AB & con trượt B (cơ cấu tay quay - con trượt) như hình vẽ.



Trong đó OA quay quanh trục cố định Oz với vận tốc góc là hằng số ($\omega = \text{const}$). Biết $OA = AB = 2a$; $\varphi = \omega t$

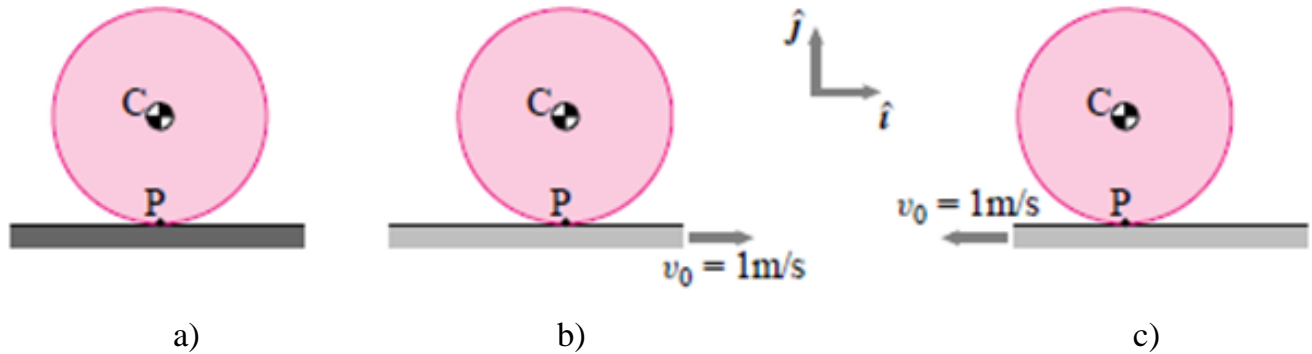
Hãy viết phương trình chuyển động của điểm M (điểm giữa của thanh AB) dưới dạng tham số t & xác định quỹ đạo của M.

Viết phương trình vận tốc và gia tốc của điểm M.

Bài 4: Một đĩa tròn bán kính $R = 20 \text{ cm}$ (lăn về phía trước, theo chiều của i) trên 1 băng tải nằm ngang với vận tốc góc $\omega = 10 \text{ rad/s}$, như hình vẽ.

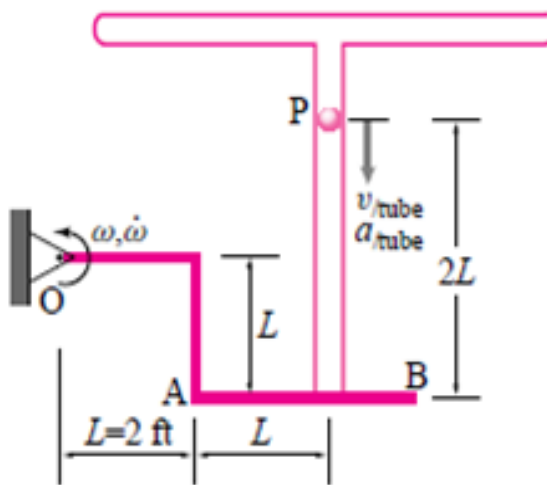
a) Hãy viết điều kiện lăn không trượt của đĩa tròn.

b) Giả sử đĩa lăn không trượt trên băng tải. Hãy xác định vận tốc tâm C của đĩa tròn trong trường hợp sau: Băng tải cố định (hình a); Băng tải chuyển động với vận tốc \vec{v}_0 (hình b); Băng tải chuyển động với vận tốc \vec{v}_0 (hình c).



c) Xét trường hợp a (băng tải đứng yên); tại thời điểm khảo sát, đĩa đang lăn nhanh dần với gia tốc của tâm là $a_c = 2 \text{ m/s}^2$. Hãy xác định gia tốc của điểm P (trên đĩa).

Bài 5: Một ống hình chữ T được hàn với tay đòn OAB như hình vẽ.



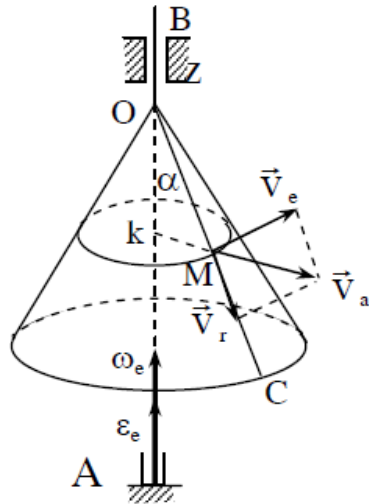
Tay đòn đang quay với vận tốc góc

$\omega = 5 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\varepsilon = 2,5 \text{ rad/s}^2$. Tại thời điểm khảo sát, chất điểm P đang rơi xuống với vận tốc 5 m/s và gia tốc $2,5 \text{ m/s}^2$ so với ống. Biết $L = 0,5 \text{ m}$.

a) Hãy xác định vận tốc tuyệt đối của chất điểm P.

b) Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của chất điểm P.

Bài 6: Động điểm M bắt đầu chuyển động từ đỉnh O của nón, dọc theo đường sinh OC với vận tốc không đổi $v_r = 24 \text{ cm/s}$.



Cùng thời điểm xuất phát của động điểm M, nón bắt đầu quay theo quy luật $\varphi = 0,125t^2$ (rad).

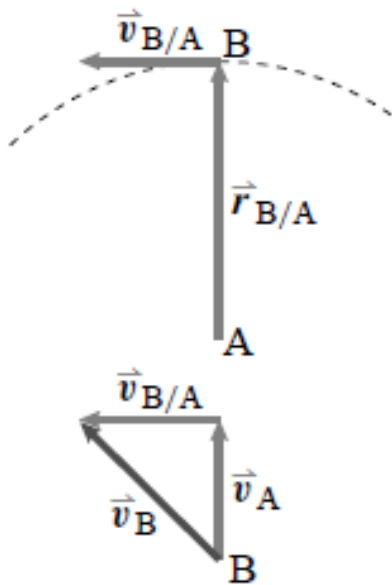
Hãy xác định vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối của điểm M tại thời điểm $t = 4s$.

Biết góc nón $2\alpha = 60^\circ$; chiều tác dụng của $\vec{\omega}$ như hình vẽ.

Hướng dẫn & kết quả

Bài 1: a) $\vec{\omega} = 0,3\vec{k} \left(\frac{rad}{s}\right)$; $\vec{\alpha} = -0,1\vec{k} \left(\frac{rad}{s^2}\right)$; $|\vec{v}_B| = 15 \frac{cm}{s}$; b) $\vec{a}_B = -(1,4\vec{i} + 6,6\vec{j}) \frac{cm}{s^2}$

Bài 2:



Vận tốc:

$$v_A = 2 \text{ m/s}; v_B = 2\sqrt{2} \text{ m/s}; v_{B/A} = 2 \text{ m/s}$$

Gia tốc:

$$\vec{a}_A = -\omega^2 \cdot \vec{r}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_A$$

$$a_A = \sqrt{(\omega^2 \times OA)^2 + (\alpha \cdot OA)^2} = \sqrt{65}$$

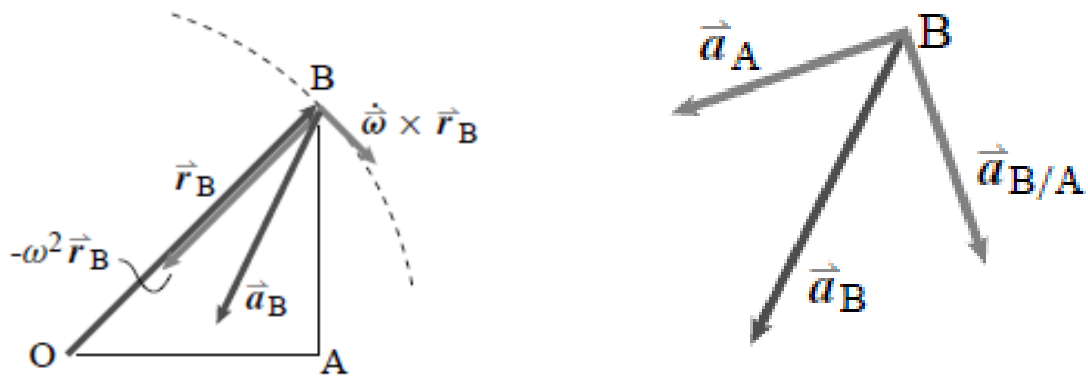
Tương tự:

$$a_B = \sqrt{(\omega^2 \times OB)^2 + (\alpha \cdot OB)^2} = \sqrt{130}$$

Có phương chiều được xác định bởi tgv

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$a_{B/A} = \sqrt{65}$$



Bài 3: • Quỹ đạo là đường ellip có phương trình:

$$\frac{x_M^2}{9a^2} + \frac{y_M^2}{a^2} = 1$$

• $v_M = \omega a \sqrt{9\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}$

• $a_M = \sqrt{\omega^4(x^2 + y^2)} = \omega^2 r; \cos(\vec{a}; \vec{Ox}) = \frac{a_x}{\omega^2 r}; \cos(\vec{a}; \vec{Oy}) = \frac{a_y}{\omega^2 r}$

Bài 4:

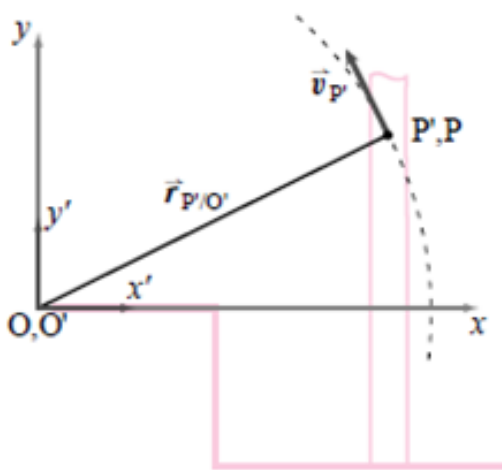
a) Tại điểm tiếp xúc, điểm P trên đĩa đang trùng với điểm Q trên băng tải.

Điều kiện lăn không trượt: $\vec{v}_P = \vec{v}_Q$

b) hình a: $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i}$ (m/s); hình b: $\mathbf{v}_C = 3\mathbf{i}$ (m/s); và hình c: $\mathbf{v}_C = 1\mathbf{i}$ (m/s).

c) $\mathbf{a}_P = 20\mathbf{j}$ (m/s²)

Bài 5:



- Hệ cố định Oxy, gắn với vật làm mốc cố định A.
- Hệ động O'x'y' (trong đó O' trùng O), gắn với tay quay OAB.
- Chuyển động quay của OAB trong hệ cố định là chuyển động theo.
- Chuyển động của điểm P (viên bi) đang rơi trong ống chữ T là chuyển động tương đối.
- Chuyển động của động điểm P so với hệ Oxy là chuyển động tuyệt đối.

a) Vận tốc tuyệt đối của điểm P:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P^*} + \vec{v}_r$$

Trong đó: $\vec{v}_{P^*} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}$; \vec{v}_r đã biết.

$v_P = 2,5 \text{ m/s}$, nằm ngang hướng từ phải qua trái.

b) $\mathbf{a}_P = \{23,75\mathbf{i} - 12,5\mathbf{j}\}$

Bài 6:

• Trong bài toán này chuyển động quay của nón quanh trục z là chuyển động theo; chuyển động của động điểm M dọc theo đường sinh OC là chuyển động tương đối. ($v_r = 24 \text{ cm/s} = \text{const}$)
Sau 4s, vị trí của M được xác định bởi $OM = v_r \cdot t = 96 \text{ (cm)}$, tương ứng $MK = 48 \text{ (cm)}$

• Trong chuyển động theo, tại thời điểm đang xét ($t = 4\text{s}$), vận tốc góc: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 1 \text{ (rad/s)}$; $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt} = 0,25 \text{ rad/s}^2$, các véc tơ $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ được biểu thị trên hình vẽ.

Trong hệ tọa độ Mxyz (hình vẽ) ta có:

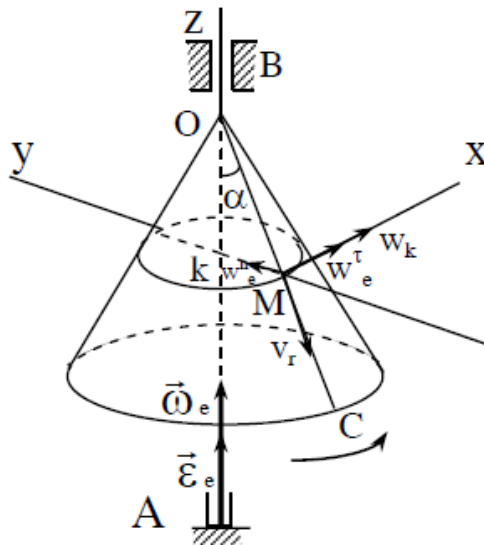
$$\begin{cases} v_{ax} = v_e & \text{độ lớn } v_{a_M} = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{48^2 + 24^2} \approx 54 \text{ (cm/s)} \\ v_{ay} = -v_r \cdot \sin\alpha \Rightarrow \text{Phương chiều được xác định bởi các góc chỉ phương} \\ v_{az} = -v_r \cdot \cos\alpha & \cos(v_M, x) = \frac{v_{ax}}{v_{a_M}}; \cos(v_M, y) = \frac{v_{ay}}{v_{a_M}}; \cos(v_M, z) = \frac{v_{az}}{v_{a_M}} \end{cases}$$

Gia tốc tuyệt đối của M:

$\vec{W}_{a_M} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_C$; trong đó: $\vec{W}_r = 0$; $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^\tau$

- $\vec{W}_e^n = \omega^2 \cdot MK$, hướng từ M về K; $\vec{W}_e^\tau = \varepsilon \cdot MK$ theo chiều trục Mx
- $W_C = 2 \omega \cdot v_r \cdot \sin\alpha$, phương \perp mp (OM; Mz) \Rightarrow theo chiều Mx.

$\Rightarrow W_{ax} = W_e^\tau + W_C$; $W_{ay} = W_e^n$; $W_{az} = 0 \Rightarrow W_{a_M} = 60 \text{ (cm/s}^2\text{)}$ và góc chỉ phương tương ứng.



PROBLEMS

Problem 1: A car has an initial speed of 25m/s and a constant deceleration of 3m/s^2 . Determine the velocity of the car when $t = 4\text{s}$. What is the displacement of the car during the 4-s time interval? How much time is needed to stop the car?

Problem 2: The position of the cyclist traveling along a straight road is described by the graph, *Figure 2*. Construct the $v-t$ and $a-t$ graphs.

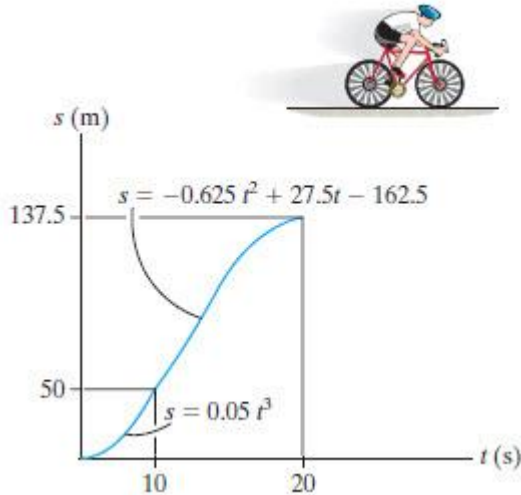


Figure 2

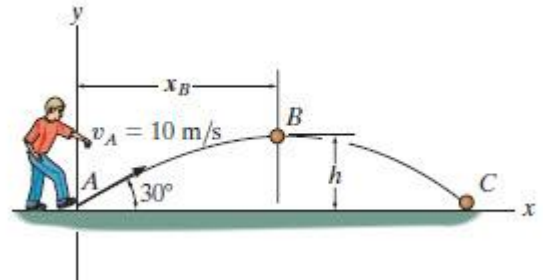


Figure 3

Problem 3: The ball is kicked from point with the initial velocity $v = 10\text{m/s}$, *Figure 3*. Determine the maximum height it reaches, the speed when the ball strikes the ground, and the equation of path of the ball.

Problem 4: The velocity of a particle is given by $\mathbf{v} = \{16t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}\}$ m/s, where t is in seconds. If the particle is at the origin when $t = 0$, determine the magnitude of the particle's acceleration when $t = 2\text{s}$. Also, what is the x, y, z coordinate position of the particle at this instant?

Problem 5: When designing a highway curve it is required that cars traveling at a constant speed of 25 m/s must not have an acceleration that exceeds 3 m/s^2 . Determine the minimum radius of curvature of the curve.

Problem 6: A car travels along a horizontal circular curved road that has a radius of 600 m. If the speed is uniformly increased at a rate of 2000 km/h^2 , determine the magnitude of the acceleration at the instant the speed of the car is 60 km/h.

Problem 7: Starting from rest, the motorboat travels around the circle path, $\rho = 50\text{m}$, at a speed $v = (0.2t^2)$ m/s, where t is in seconds, *Figure 7*. Determine the magnitudes of the boat's velocity and acceleration at the instant $t = 3\text{s}$.

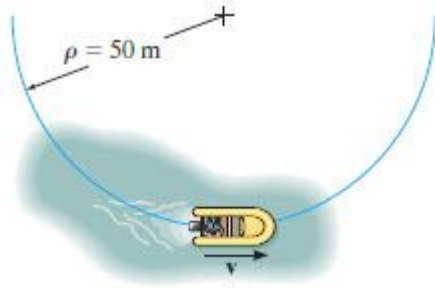


Figure 7

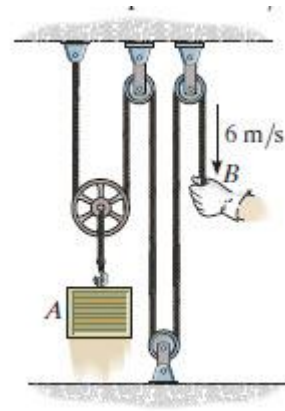


Figure 8

Problem 8: Determine the speed of block A if end B of the drop is pulled down with a speed of 6 m/s , *Figure 8*.

Problem 9: The boats (A & B , *Figure 9*) travel with constant speeds of $v_A = 15 \text{ m/s}$ and $v_B = 10 \text{ m/s}$ when they leave the pier at O at the same time. Determine the distance between them when $t = 4 \text{ s}$.

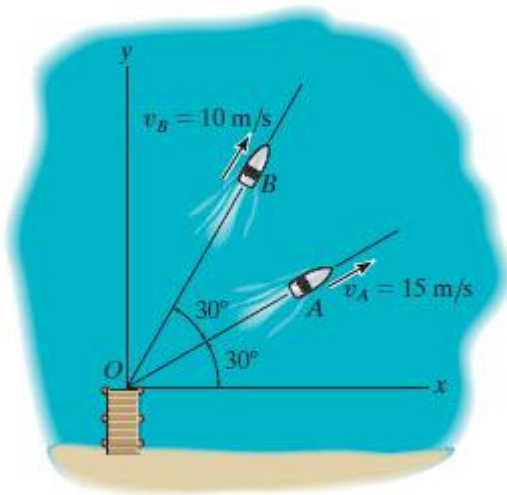


Figure 9

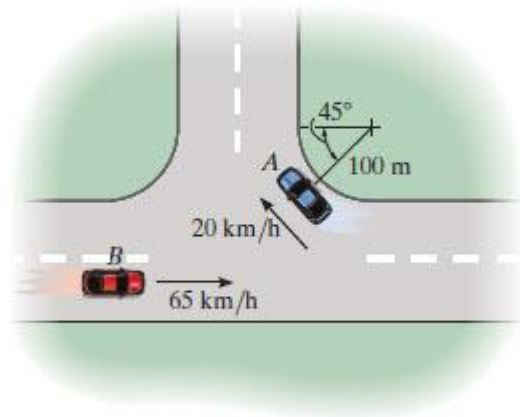


Figure 10

Problem 10: At the instant shown, cars A and B are traveling at the speeds shown in *Figure 10*. If B is accelerating at 1200 km/h^2 while A maintains a constant speed, determine the velocity and acceleration of A with respect to B .

Problem 11:

a) If the motor of the electric drill (*Figure 11*) turns the armature shaft S with a constant angular acceleration of $\epsilon_s = 30 \text{ rad/s}^2$, determine the angular velocity of the shaft after it has turned 200 rev, starting from rest.

b) If the motor of the electric drill turns the armature shaft S with an angular velocity of $\omega_s = (100t^{1/2})$ rad/s, determine the angular velocity and angular acceleration of the shaft at the instant it has turned 200 rev, starting from rest.



Figure 11

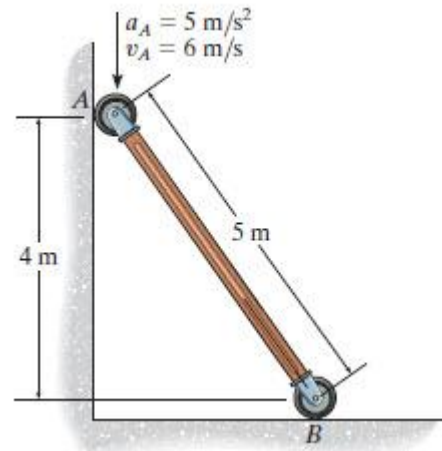


Figure 12

Problem 12: At the instant shown, end A of the rod has the velocity and acceleration shown in *Figure 12*. Determine the angular velocity and acceleration of the rod, and acceleration of end B of the rod.

Problem 13:

a) If crank OA rotates with an angular velocity of $\omega = 12$ rad/s, determine the angular velocity of rod AB and the velocity of piston B at the instant shown in *Figure 13*.

b) If $\omega = 12$ rad/s = constant, determine the angular acceleration of rod AB and acceleration of piston B at the instant shown.

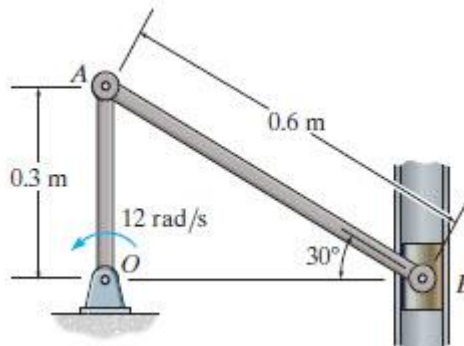


Figure 13

Problem 14: At the instant shown, ball B is rolling along the slot in the disk (*Figure 14*) with a velocity of 600 mm/s and an acceleration of 150 mm/s², both measured relative to the disk and directed away from O . If at the same instant the disk has the angular velocity and angular acceleration shown, determine the velocity and acceleration of the ball at this instant.

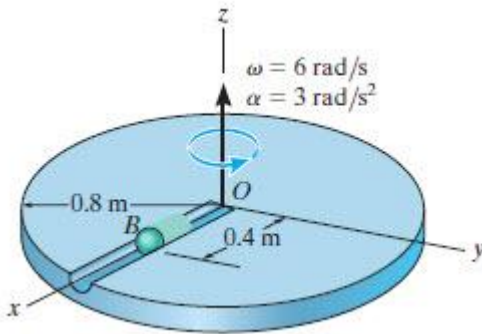


Figure 14

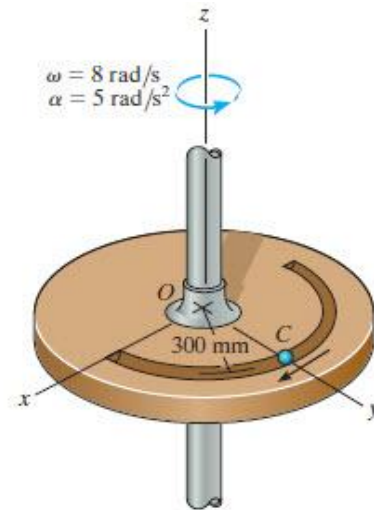


Figure 15

Problem 15: Ball C moves with a speed of 3 m/s ; which is increasing at a constant rate of 1.5 m/s^2 , both measured relative to the circular plate and directed as shown in *Figure 15*. At the same instant the plate rotates with angular velocity and angular acceleration shown. Determine the velocity and acceleration of the ball at this instant.

ANSWERS:

Answer 1: $v = 13 \text{ m/s}$; $\Delta s = 76 \text{ m}$; $t = 25/3 \approx 8.33 \text{ s}$

Answer 3: see files "3.4 Projective Motion"

$h = 1.27 \text{ m}$; $v_C = 10 \text{ m/s}$; $y = (-2g/300)x^2 + (tg30^\circ)x$

Answer 4: $a = 80.2 \text{ m/s}^2$; $(42.7, 16.0, 14.0)$

Answer 5: $\rho \geq 25^2/3$; $\rho_{\min} \approx 208 \text{ m}$

Answer 6: $a = 0.488 \text{ m/s}^2$

Answer 7: $v = 1.8 \text{ m/s}$; $a = 1.2 \text{ m/s}^2$

Answer 8: $v_A = -3 \text{ m/s}$

Answer 9: $d_{AB} = 32.3 \text{ m}$

Answer 10: $\mathbf{v}_{A/B} = -80\mathbf{i} - 14\mathbf{j} \text{ (km/h)}$; $\mathbf{a}_{A/B} = (-1.6 \times 10^3)\mathbf{i} + 2.8 \times 10^3\mathbf{j} \text{ (km/h}^2\text{)}$

Answer 11: $t = 7.083 \text{ s}$; $\omega_s = 266 \text{ rad/s}$; $\varepsilon_s = 18.8 \text{ rad/s}^2$

Answer 12: $\omega = 2 \text{ rad/s}$; $\varepsilon = -3.67 \text{ rad/s}^2$; $a_B = -26.7 \text{ m/s}^2$

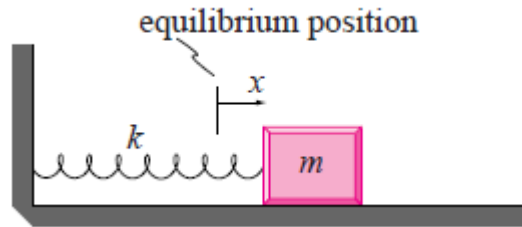
Answer 13: a) $\omega_{AB} = 12 \text{ rad/s}$; $v_B = 6.2 \text{ m/s}$; b) $\varepsilon_{AB} = 249 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 129 \text{ m/s}^2$

Answer 14: $\mathbf{v}_B = \{0.6\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}$; $\mathbf{a}_B = \{-14.25\mathbf{i} + 8.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$

Answer 15: $(\mathbf{a}_{rel})_{xyz} = \{1.5\mathbf{i} - 30\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$; $\mathbf{v}_C = \{0.6\mathbf{i}\} \text{ m/s}$; $\mathbf{a}_C = \{-1.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$

BÀI TẬP PHẦN 3: ĐỘNG LỰC HỌC

Bài 1: Hệ gồm lò xo và vật nặng khối lượng m như hình vẽ.



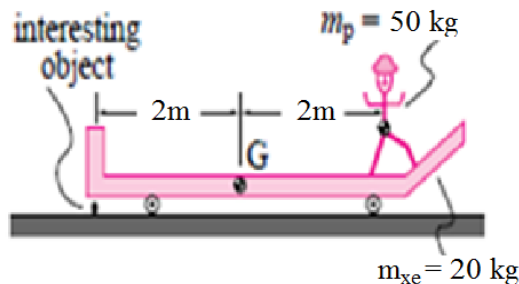
Bỏ qua ma sát, hãy viết phương trình chuyển động của vật nặng.

Biết phương trình chuyển động (dao động điều hòa) của hệ là: $x(t) = R\cos(\lambda t - \Phi)$

Tại thời điểm đầu vị trí của khối lượng m là $x_0 = 25\text{mm}$ và vận tốc đầu là $v_0 = 160\text{ mm/s}$. Biết tần số tự nhiên của dao động là $f = 2$ (chu kỳ/giây).

- Hãy tìm chu kỳ dao động T và tần số góc λ .
- Hãy tìm biên độ dao động R và góc pha Φ .
- Hãy xác định chuyển vị, vận tốc & gia tốc của khối lượng tại thời điểm $t = 1,5\text{s}$.
- Tìm vận tốc & gia tốc lớn nhất của hệ.
- Hãy vẽ đồ thị mô tả phương trình chuyển động $x(t)$. Trên đồ thị này hãy chỉ ra những đại lượng R , $R\cos \Phi$, và T .

Bài 2: Mr. P đang đứng ở vị trí đầu xe (phía bên phải), hình vẽ, quan sát thấy 1 vật hấp dẫn đang nằm trên mặt đường tại vị trí cuối xe (phía trái). Mr. P quyết định đi về phía cuối xe để nhặt vật đó.



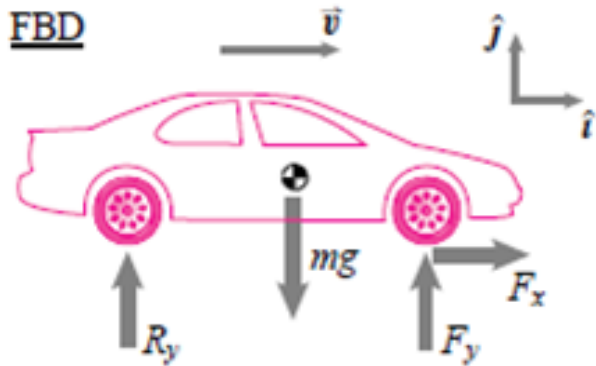
Khi Mr. P đi đến cuối xe thì nhận ra rằng vật cần nhặt cách ông ta 1 đoạn x .

Biết: $m_p = 50\text{ kg}$; $m_{xe} = 20\text{ kg}$. Bỏ qua ma sát giữa bánh xe và mặt đường. Trọng lượng của xe đặt tại khối tâm G. Tại thời điểm đầu xe đứng yên.

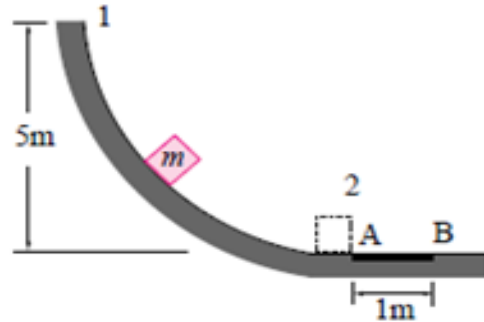
Hãy dùng định lý chuyển động khối tâm hay định luật bảo toàn động lượng để xác định đoạn x này.

Bài 3: Một ô tô đang chạy trên đường thẳng với tốc độ $v = 120 \text{ km/h}$. Tài xế bắt đầu hãm phanh, hình 3; ô tô bắt đầu giảm tốc độ từ 120 km/h xuống còn 48 km/h trong thời gian $\Delta t = 4 \text{ s}$.

Giả sử trong thời gian hãm phanh ô tô vẫn chạy trên đường thẳng. Khối lượng ô tô là $m = 1200 \text{ kg}$. Hãy tìm lực hãm trung bình tác dụng lên xe trong thời gian này.



Hình 3



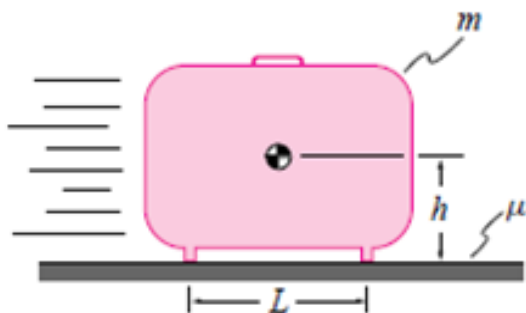
Hình 4

Bài 4: Một vật có khối lượng $m = 2,5 \text{ kg}$ bắt đầu trượt xuống từ vị trí 1 có độ cao $h = 5 \text{ m}$ trên một mặt phẳng nghiêng không ma sát, hình 4.

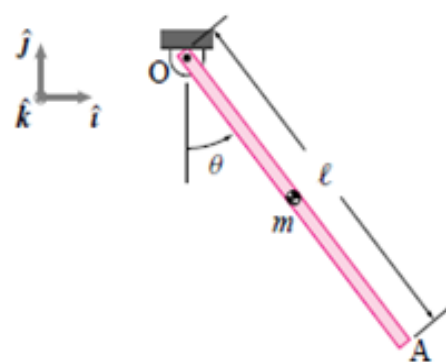
Khi đến vị trí 2 (điểm A), vật tiếp tục chuyển động trên 1 mp nằm ngang như hình vẽ. Biết hệ số ma sát giữa mặt phẳng nằm ngang và vật μ . Nếu tại điểm B vật có vận tốc là $v_B = 9 \text{ m/s}$. Biết đoạn đường nằm ngang $AB = 1 \text{ m}$. Hãy xác định hệ số ma sát μ giữa vật và mặt phẳng nằm ngang AB.

Bài 5: Một va-ly đang trượt thuần túy trên bề mặt nằm ngang. Giả sử va-ly chỉ tiếp xúc với bề mặt tại 2 điểm A và B, hình 5. Hệ số ma sát giữa va-ly và bề mặt là μ . Hãy vẽ sơ đồ chịu lực của va-ly. Biết $AB = L$; trọng tâm của va-ly nằm ở độ cao h và ở giữa đoạn AB như hình vẽ.

Hãy xác định phản lực tại A, B & gia tốc của va-ly. Nhận xét về phản lực tại A và B theo h, L, μ .



Hình 5



Hình 6

Bài 6: Một thanh đồng chất, khối lượng m , chiều dài ℓ : quay quanh khớp bản lề tại O . Tại thời điểm khảo sát vị trí của thanh được xác định bởi góc θ so với phương đứng, hình 6.

a) Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của thanh bằng cách dùng phương trình cân bằng moment động lượng.

b) Hãy xác định phản lực \vec{R} tại khớp quay quanh O theo các thông số θ , $\dot{\theta}$, và $\ddot{\theta}$ theo các hằng số g , m , ℓ .

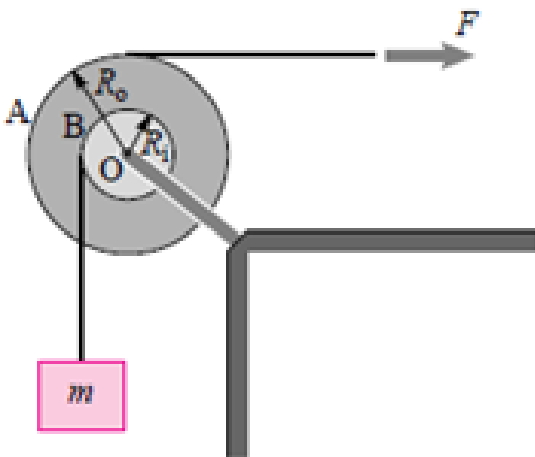
c) Viết phương trình vi phân chuyển động của thanh bằng cách dùng phương trình cân bằng năng lượng.

d) Giả sử tại thời điểm đầu, vị trí của thanh là $\theta = \frac{\pi}{2}$ và $\omega = \dot{\theta} = 0$. Hãy dùng định luật bảo toàn cơ năng để xác định vận tốc góc ω của thanh tại vị trí $\theta = 0$.

e) Giả sử dao động của thanh là nhỏ ($\sin\theta \approx \theta$), hãy viết phương trình vi phân chuyển động của thanh theo $\ddot{\theta}$, θ ; từ đó xác định tần số góc và chu kỳ chuyển động của thanh.

f) Viết phương trình chuyển động của thanh theo điều kiện đầu ở câu d.

Bài 7: Một pulley kép gồm pulley B có bán kính $R_i = 100 \text{ mm}$ được hàn với pulley A có bán kính $R_o = 200 \text{ mm}$. Mô men quán tính của pulley kép đối với trục Oz (vuông góc với mặt phẳng chuyển động) là $I_{Oz} = 1,6 \text{ kgm}^2$. Một sợi dây được vắt ngang qua pulley B mang vật có khối lượng $m = 2 \text{ kg}$. Một sợi dây được vắt qua pulley A được kéo bởi lực \vec{F} , với $F = 20 \text{ N}$, như hình vẽ. Giả sử bỏ qua khối lượng của dây, xem dây không giãn và không có trượt giữa pulley và dây.



a) Hãy dùng phương trình cân bằng mô men động lượng của cơ hệ để xác định gia tốc của pulley. Từ đó xác định gia tốc của vật nặng.

b) Hãy dùng phương trình cân bằng năng lượng của cơ hệ để xác định gia tốc góc của pulley.

c) Hãy xác định lực căng của dây (mang vật nặng m).

Hình vẽ & hướng dẫn giải bài tập

Bài 1:

Phương trình vi phân chuyển động: $\ddot{x} + (k/m)x = 0$

Đặt $\lambda^2 = k/m$, ta có: $\ddot{x} + \lambda^2 x = 0$

Phương trình chuyển động là: $x(t) = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t$

Trong đó, A & B là các hằng số tích phân được xác định dựa vào điều kiện đầu.

Phương trình có thể viết dưới dạng: $x(t) = R\cos(\lambda t - \Phi)$, **dao động điều hoà**

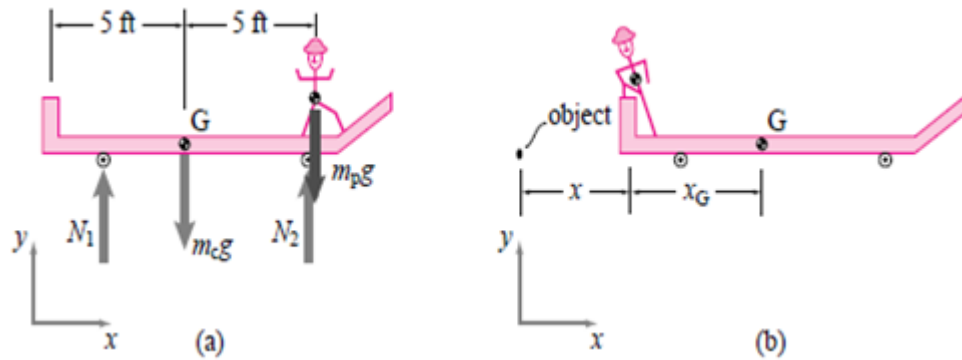
Các thông số của dao động điều hoà:

$R = (A^2 + B^2)^{1/2}$: **biên độ dao động**; $\Phi = B/A$: **góc pha**; λ : **tần số góc**

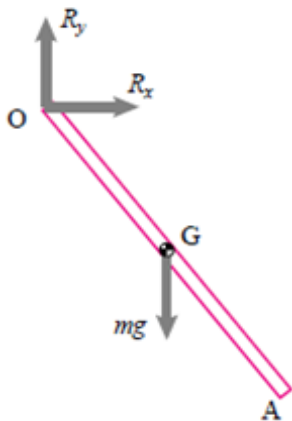
Chu kỳ dao động, T (giây), là khoảng thời gian để hoàn thành 1 dao động, $T = 2\pi/\lambda$

Tần số dao động, f (Hz), cho biết bao nhiêu chu kỳ được thực hiện trong 1 giây; $f = 1/T$

Bài 2:



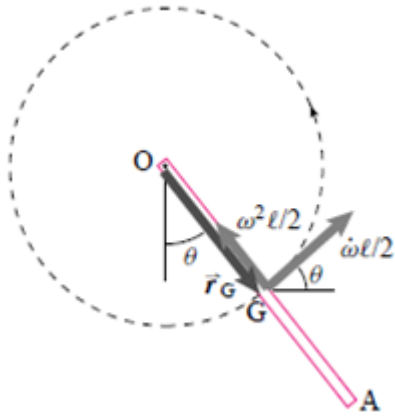
Bài 6:



a) Dùng $\dot{H}_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_K^\ell)$, với $H_{Oz} = I_{Oz}\omega$

$$I_{Oz} = \frac{ml^2}{3}$$

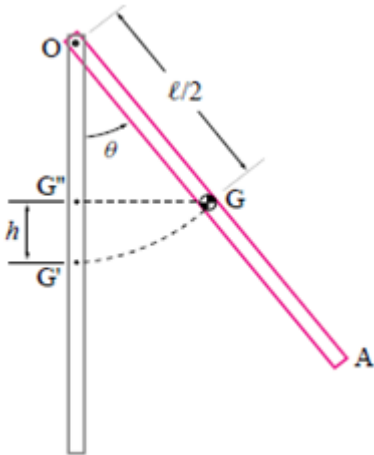
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0 \quad (1)$$



b) $\sum \vec{F}_K^\ell = m\vec{a}_G$; trong đó $\sum \vec{F}_K^\ell = \vec{R}_x + \vec{R}_y + m\vec{g}$ (hình a)

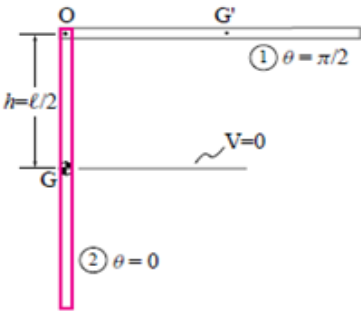
$$\vec{a}_G = \vec{a}_G^n + \vec{a}_G^t \text{ (hình b)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = m \frac{\ell}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ R_y = mg + m \frac{\ell}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{cases}$$



c) Dùng: $\frac{dT}{dt} = \dot{T} = \sum P_K^\ell$ trong đó: $T = \frac{1}{2} I_{Oz} \cdot \omega^2$

và $P_K^\ell = -mg \frac{dh}{dt}$ với $h = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)$ (hình c) \Rightarrow Đ/số: (1)



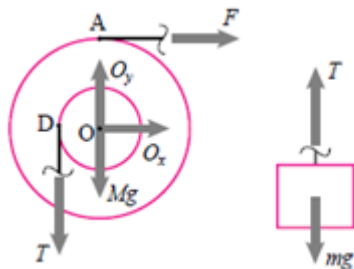
d) Dùng định lý bảo toàn cơ năng: $E = T + V = \text{const}$

$T_0 + V_0$ (tại vị trí đầu) = $T + V$ (vị trí đang xét) $\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$

e) Hướng dẫn trong phần kết quả

Bài 7:

a) $\dot{H}_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_K^\ell)$, chọn Oz hướng từ ngoài vào trong.



$$H_z = I_{Oz} \cdot \omega + m v_D \cdot R_i \Rightarrow \dot{H}_z$$

$$m_z(\vec{F}_K^\ell) = FR_o - mgR_i$$

$$\text{ĐS: } (\varepsilon = \dot{\omega} =) \ddot{\theta} = \frac{FR_o - mgR_i}{I_{Oz} + mR_i^2} = 1,258 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

Kết quả

Bài 1:

- $T = 0,5 \text{ s}; \lambda = 4\pi \text{ rad/s}$
- $R = 28,06 \text{ mm}; \Phi = 0,471 \text{ rad}$
- $x = 25 \text{ mm}; v_x = 160 \text{ mm/s}; a_x = -3,93 \text{ m/s}^2$
- $v_{\max} = 0,35 \text{ m/s}; a_{\max} = 4,43 \text{ m/s}^2$
- Vẽ đồ thị chính xác như có thể & ghi chú rõ ràng.

Bài 2:

$$x = \frac{m_P \cdot x_P}{m_{xe} + m_P}$$

Bài 3:

Dùng định lý biến thiên động lượng $\vec{l}_2 - \vec{l}_1 = \sum \vec{S}_{K_e}$

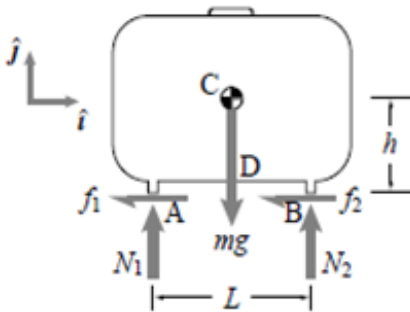
Theo phương x nằm ngang: $l_{2x} - l_{1x} = F_x \cdot \Delta t$

Lực hãm $\vec{F}_x = -6\vec{i} \text{ (kN)}$

Bài 4:

- Vật chuyển động từ vị trí 1 đến vị trí 2 (điểm A), không ma sát \rightarrow dùng định luật bảo toàn cơ năng $\Rightarrow v_A$.
- Đoạn AB, lực ma sát không là lực thế, không thể dùng định luật bảo toàn cơ năng, dùng định lý biến thiên động năng: $T_B - T_A = \sum A_K^\ell \Rightarrow \mu = 0,87$

Bài 5:



- Sơ đồ chịu lực (FBD) như hình vẽ.
- Valy chuyển động tịnh tiến, có thể xem như là chuyển động của 1 chất điểm đặt tại khối tâm C, có khối lượng là khối lượng valy, có vận tốc & gia tốc của khối tâm C.
- Theo Newton $\sum \vec{F}_K^\ell = m\vec{a}$ (I)

Chọn Oxy như hình vẽ, chiều (I) lên Ox & Oy, ta có 2 phương trình (1) & (2), chứa 3 ẩn N_1, N_2 và gia tốc a.

Dùng phương trình cân bằng moment động lượng để có thêm 1 phương trình.

$$+ \text{động lượng } m\vec{v} \Rightarrow \vec{H}_A(m\vec{v}) = \vec{AC} \times m\vec{v}$$

Chọn \vec{k} hướng từ trong ra ngoài; lấy moment đối với bất kỳ điểm nào đó, thuận tiện nhất là 2 điểm A hoặc B,

Đạo hàm của moment động lượng (lấy với A) = tổng moment của tất cả các lực.

Ta có phương trình: $-mah\vec{k} = LN_2 \vec{k} - mg(L/2) \vec{k}$ (II).

Chiếu lên Oz, Ta có phương trình: $LN_2 - mg\frac{L}{2} = -mah$ (3)

Giải (1), (2) & (3), ta có:

$$\text{ĐS: } \begin{cases} N_1 = mg \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{L} \mu \right); N_2 = mg \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{L} \mu \right); a = -\mu g. \\ F_1 = \mu N_1; F_2 = \mu N_2 \end{cases}$$

Nhận xét: • Khi $\mu = 0$ (không có ma sát thì không có sự giảm tốc) $\Rightarrow a = 0$, bài toán trở thành bài toán tĩnh.

• Khi $L \gg h \Rightarrow N_1 = N_2 \approx \frac{1}{2} mg$, trong trường hợp này moment do lực ma sát (đối với khối tâm) gây ra quá nhỏ so với moment do các lực khác gây ra, có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực ma sát.

Bài 6:

Câu a), b), c) & d) đã hướng dẫn giải ở phần hình vẽ.

e) Khi $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow$ phương trình vi phân chuyển động

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell} \theta = 0 \quad (2)$$

$$\text{Tần số góc } \lambda = \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}; \text{ chu kỳ } T = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

Chú ý: SV có thể giải phương trình vi phân bậc 2 (phương trình (2) cùng với điều kiện đầu) để tìm phương trình $\theta(t)$.

Bài 7:

- Thừa nhận dây không giãn và bỏ qua khối lượng của dây nghĩa là mỗi điểm trên dây phải có cùng chuyển động, vận tốc và gia tốc như của vật nặng.
- Tại thời điểm khảo sát, nếu xét điểm D là điểm tiếp xúc giữa dây và pulley B. Vận tốc và gia tốc của điểm D' (trùng với D và nằm trên pulley B) vì không có trượt giữa dây và pulley.

Nghĩa là: $v_D = \omega \cdot R_B$ và $(a_D)_t = \varepsilon \cdot R_B$

Vận tốc và gia tốc của điểm D' trên dây cũng chính là vận tốc và gia tốc của vật nặng m =>
 $a_m = a_{D'} = 0,1258 \text{ (m/s}^2\text{)}$ theo phương thẳng đứng, có chiều từ dưới lên trên.

b) Dùng $\dot{T} = \sum P_K^\ell$ với $T = I_{Oz} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} m v_D^2$ và $\sum P_K^\ell = F v_A - m g v_D \Rightarrow \ddot{\theta}$

c) Từ FBD của vật nặng m; dùng Newton.

$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$; chiều lên phương đứng theo chiều chuyển động

$\Rightarrow T - mg = ma_m \Rightarrow T = 198,7 \text{ (N)}$.

PROBLEMS

Problem 1: The motor winds in the cable with a constant acceleration, *Figure 1*, such that the 20-kg crate moves a distance $s = 6\text{ m}$ in 3s, starting from rest. Determine the tension developed in the cable. The coefficient of kinetic friction between the crate and the plane is $\mu_k = 0.3$.

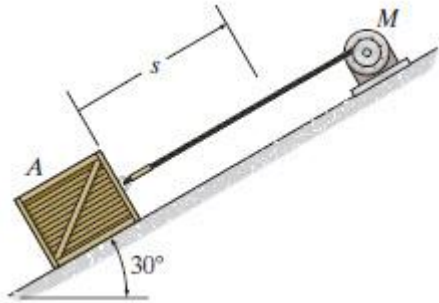


Figure 1

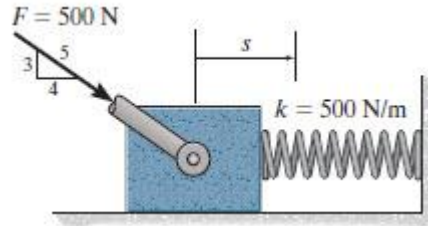


Figure 2

Problem 2: A spring of stiffness $k = 500\text{ N/m}$ is mounted against the 10-kg block, *Figure 2*. If the block is subjected to the force of $F = 500\text{ N}$, determine its velocity at $s = 0.5\text{ m}$ using method of Work and Energy. It is assumed that when $s = 0$ the block is at rest and the spring is uncompressed. The contact surface is smooth.

Problem 3: The cart and its load have a total mass of 100 kg, *Figure 3*. Determine the acceleration of the cart and the normal reactions on the pair of wheels at A and B. Neglect the mass of the wheels.

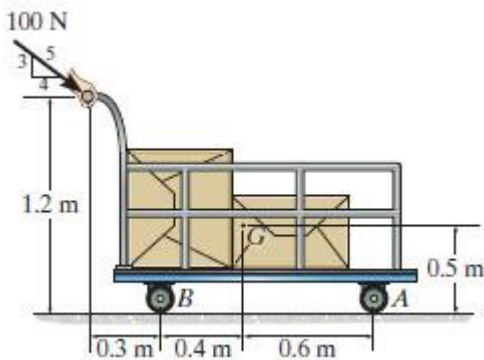


Figure 3

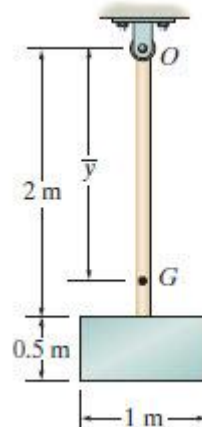


Figure 4

Problem 4: The pendulum consists of the 3-kg slender rod and the 5-kg thin plate, *Figure 4*. Determine the position y_G of center of mass G of the pendulum; then calculate the moment of inertia of the pendulum about an axis perpendicular to the page and passing through G.

Note: + for a slender rod, $I_{CZ} = (1/12) ml^2$; + for a thin plate, $I_{CZ} = (1/12) m[(l_x)^2 + (l_y)^2]$

Problem 5: The 60-kg wheel has a radius of gyration about its O center of $k_O = 300$ mm, *Figure 5*. If it is subjected to a couple moment of $M = (3t^2)$ N.m, where t is in seconds, determine the angular velocity of the wheel when $t = 4$ s, starting from rest.

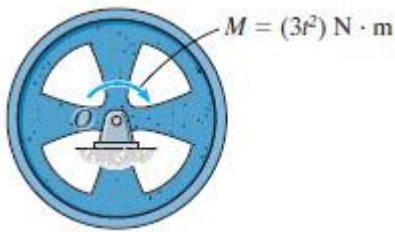


Figure 5

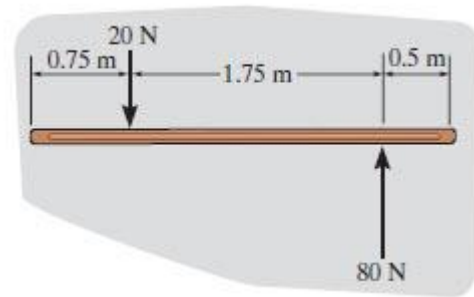


Figure 6

Problem 6: The uniform 60kg slender bar is initially at rest on a smooth horizontal plane when the forces are applied, *Figure 6*. Determine the acceleration of the bar's mass center and the angular acceleration of the bar at this instant.

Problem 7: The uniform 50-kg slender rod is at rest in the position shown when $P = 600$ N is applied, *Figure 7*. Determine the angular velocity of the rod when rod reaches the vertical position.

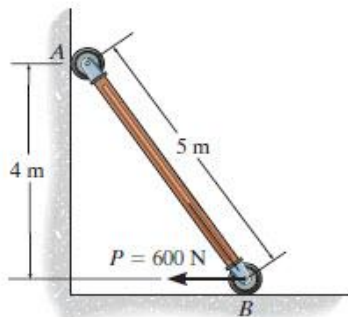


Figure 7

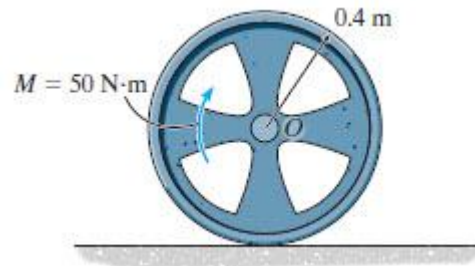
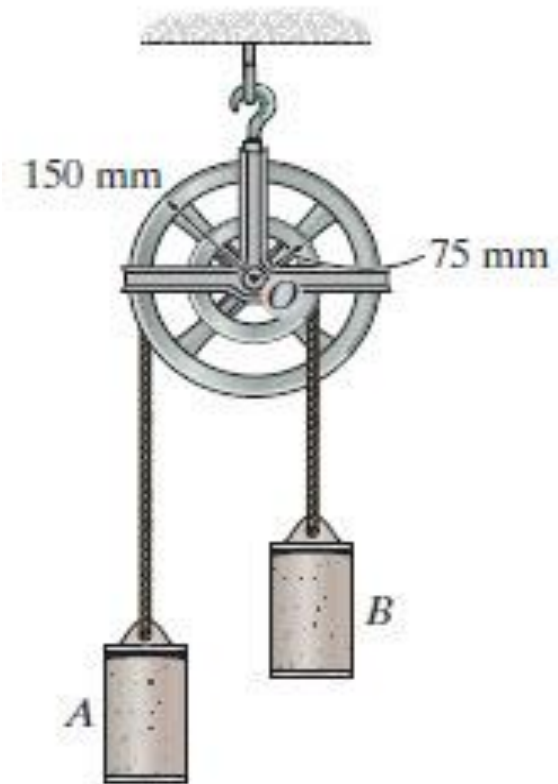


Figure 8

Problem 8: The 20-kg wheel has a radius of gyration about its O center of $k_O = 300$ mm, *Figure 8*. When it is subjected to a couple moment of $M = 50$ N.m, it rolls without slipping. Determine the angular velocity of the wheel after its center has traveled through a distance of $s_O = 20$ m starting from rest.

Problem 9:



- a) If the system is released from rest; determine the speed of the 20-kg cylinder A and B after A has moved downward a distance of 2 m. The differential pulley has a mass of 15 kg with a radius of gyration about its center of mass of $k_o = 100$ mm.
- b) Write the equation of motion of pulley using energy method & Euler's principles.

ANSWERS:

Answer 1: $T = 176$ N

Answer 2: $v = 5.24$ m/s

Answer 3: $a = (a_G)_x = 0.8$ m/s²; $N_A = 430$ N; $N_B = 610$ N

Answer 4: $y_G = 1.78$ m; $I_G = 4.45$ kgm²

Answer 5: $\omega = 11.85$ rad/s = 11.9 rad/s

Answer 6: $a_G = 1$ m/s²; $\varepsilon = 2.11$ rad/s²

Answer 7: $\omega = 2.73$ rad/s

Answer 8: $\omega = 31.62$ rad/s = 31.6 rad/s

Answer 9: $v_A = 3.52$ m/s; $v_B = 1.76$ m/s;

$$\theta = (1/2)[(m_A g R_A - m_B g R_B)/(m_A R_A^2 + m_B R_B^2 + m_p k_o^2)]t^2$$

DYNAMICS – MORE PROBLEMS

Problem 1: Based on the files “1. History of Dynamics; Motion in Moving Reference Frames”:

a) Summary History of Dynamics



b) A system including spring, damper and mass (M).

Writing the differential equation of motion of the mass

c) Summary the major contents about “Reference Frames + Vectors”; “velocity and acceleration in fixed Cartesian Coor.”

Problem 2: A rocket is launched straight up into the air. At time $t = 0$ the rocket is at rest. The position of rocket as a function of time is given by:

$$y(t) = \frac{1}{2}(a_0 - g)t^2 - \frac{1}{30} \frac{a_0}{t_0^4} t^6 \text{ for } 0 < t < t_0$$

, where a_0 is a positive constant, g is the acceleration of gravity and $a_0 > g$. The constant t_0 is the amount of time that the fuel takes to burn out.

Find a , the y – component of the acceleration as a function of time (express the answer in terms of g , t , a_0 , and t_0).

Solution: see files “1.7 Worked Example – Derivative in Kinematics”

Problem 3: A runner travels along the x – axis, and at time $t = 0$ is at origin. The x – component of runner’s position with respect to the origin is given by:

$$x = bt^2, \text{ where } b \text{ is a positive constant}$$

a) What is unit of constant b ? Express your answer in terms of m for meter and s for seconds.

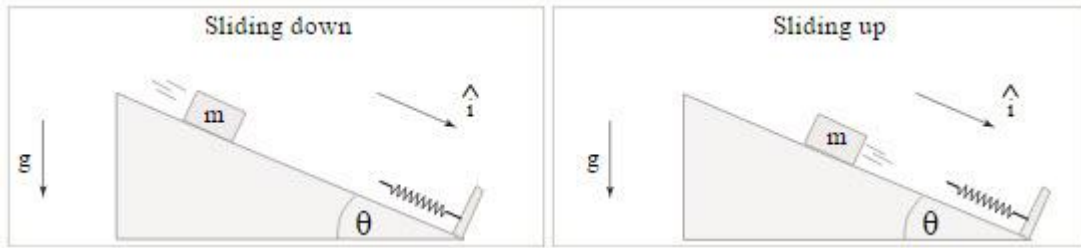
b) Find $v(t)$, the x – component of the runner’s velocity as a function of time.

c) Find $a(t)$, the x – component of the runner’s acceleration as a function of time.

d) Do a plot of $x(t)$, $v(t)$, and $a(t)$ vs time

Solution: see files “2.3 Worked Example – Acceleration from position”

Problem 4: A block of mass m is sliding down an inclined plane of angle θ with respect to horizontal (left figure).



At the bottom of the incline there is a spring. After compressing the spring the block stops momentarily and then it starts to slide up the incline as shown in the right figure. There is kinetic friction between the block and the inclined surface. The coefficient of kinetic friction is μ_k . The gravitational force on the block is directed in the downward vertical direction. Consider the x – axis parallel to the inclined surface and positive pointing down. Express your answer in terms of g , θ , μ_k .

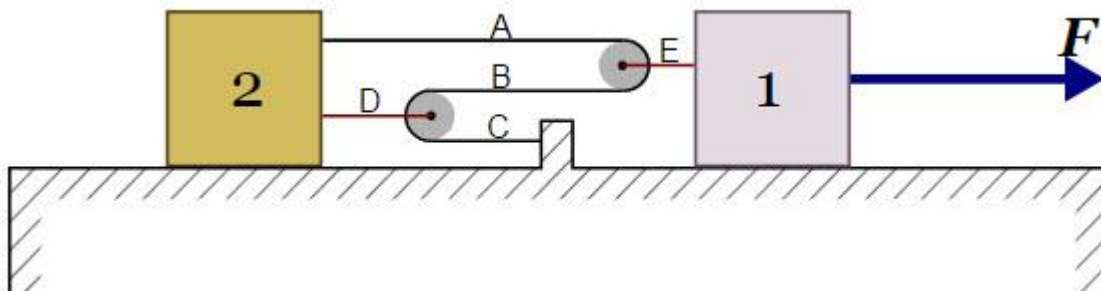
- What is the x – component of the block’s acceleration vector when it is sliding down?
- What is the x – component of the block’s acceleration vector when it is sliding up?

Solution: see files “PS.2.1 Worked Example – Sliding Block”

- To describe the relationship between work (W) and the change of kinetic energy (ΔK) when the block is sliding down.

Solution: see files “21.6 Worked Example – Block Going Down a ramp”

Problem 5: Blocks 1 and 2 lie on a frictionless surface and connected by three massless ropes strung over massless, frictionless pulleys as shown in the figure.



A force of magnitude F is applied to block 1.

- Draw FBD for block 1 and block 2 as they move across the table.
- Draw FBD for the right and left pulley.
- Determine the acceleration of block 1 and block 2.

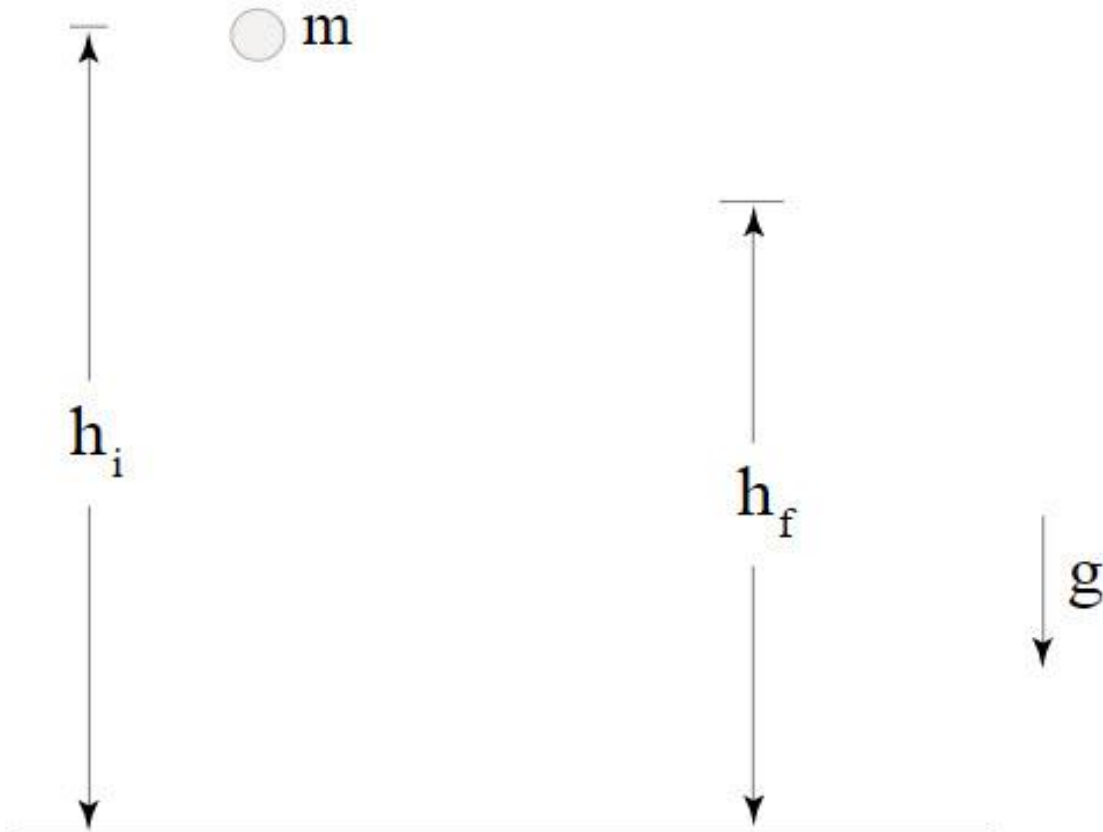
Solution: see files “12.5 Worked Example – 2 blocks and 2 pulleys”

Problem 6: A ball of mass m is released from rest from a height h_i above a horizontal surface. It hits the surface and bounces off vertically to reach a maximum height h_f as shown in the figure.

Definition of Average Force:

The time average of a force $\vec{F}(t)$ between times t_1 and t_2 is defined as:

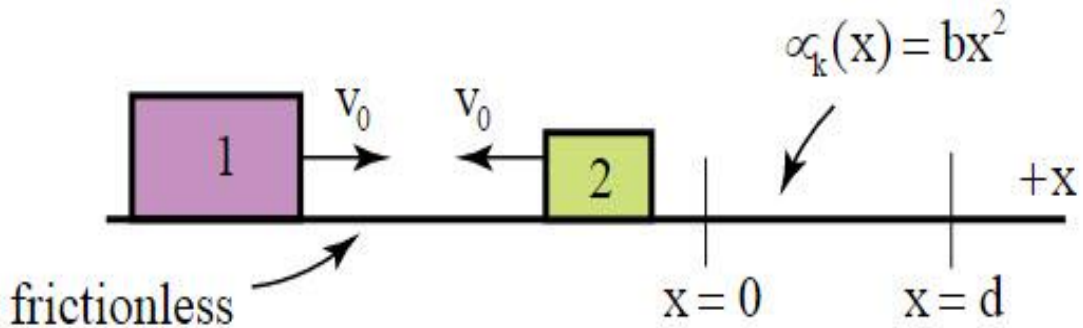
$$\vec{F}_{ave} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt}{t_2 - t_1}$$



The ball is in contact with the table for a time T . Calculate N_{ave} , the magnitude of the time average normal force exerted by the table on the ball. Express your answer in terms of m , g , T , h_i , and h_f .

Solution: see files “15.3 Worked Example – Bouncing Ball”

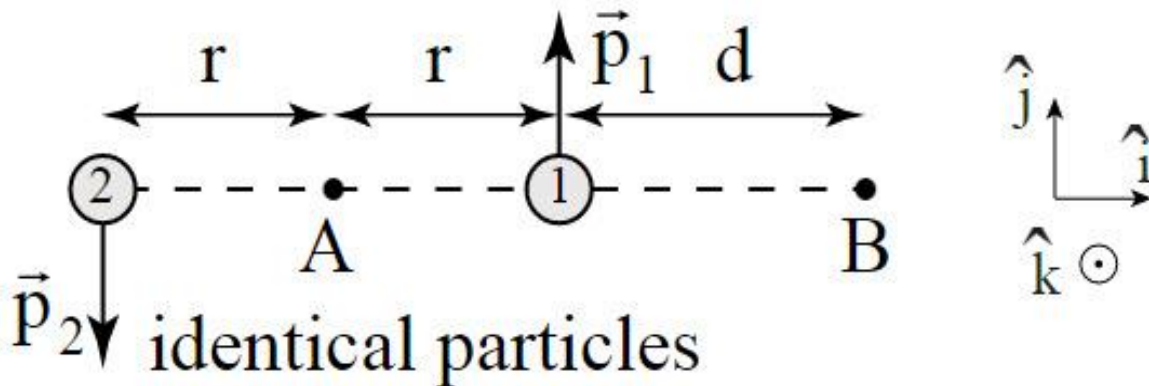
Problem 7: Block 1 of mass $3m$ is sliding along a frictionless horizontal table to the right with speed v_0 . Block 2 of mass m is moving to the left with speed v_0 , as shown in the figure.



After collision, the two blocks stick together and the blocks enter a rough surface at $x = 0$ with a coefficient of kinetic friction that increases with distance as $\mu(x) = bx^2$ for $0 \leq x \leq d$, where b is a positive constant. The blocks come to rest at $x = d$. The downward gravitational acceleration has magnitude g . Determine an expression for the initial speed v_0 of the block.

Solution: see files “PS.7.1 Worked Example – Collision and Sliding on a Rough Surface”

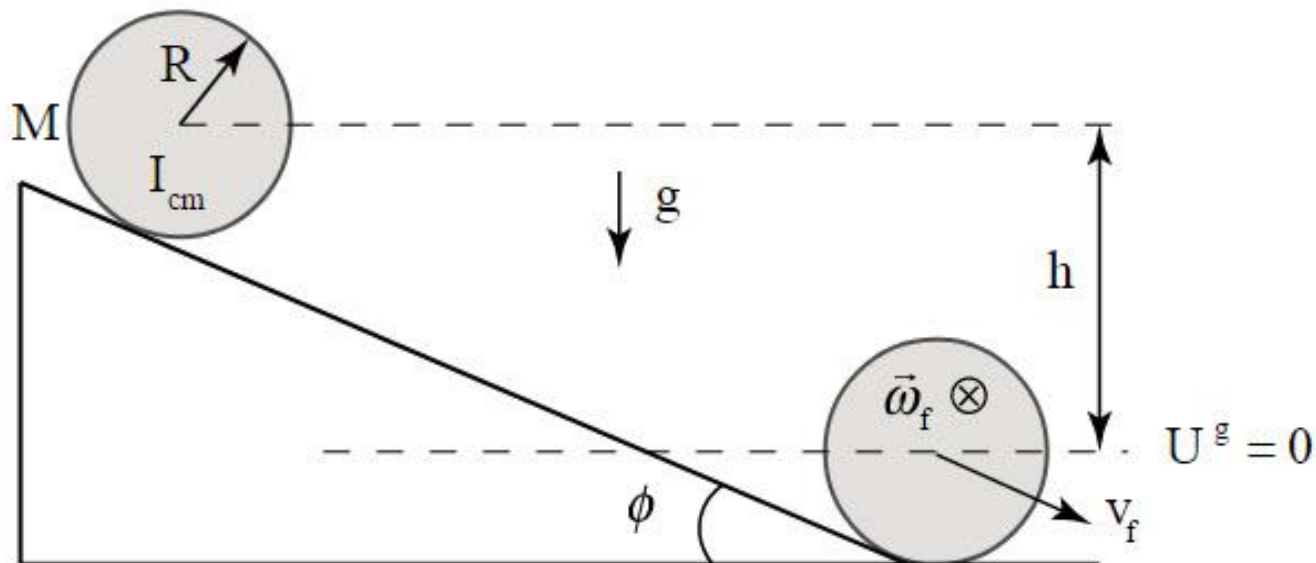
Problem 8: Two identical particles form a system. At the time shown in the figure the particles have equal and opposite momentum $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$.



- Determine a vector expression for the angular momentum of the system about the point A.
- Determine a vector expression for the angular momentum of the system about the point B.
- How do your results for angular momentum about A and B compare?

Solution: see files “32.3 Worked Example – Angular Momentum About Different Points”

Problem 9: A cylinder of radius R , mass M , and moment of inertia I_{cm} about the axis passing through its center of mass starts from rest and moves down an incline plane at an angle ϕ from the horizontal. The center of mass of the cylinder has dropped a vertical distance h when it reaches the bottom of the incline, as shown in the figure.



The cylinder rolls down the incline without slipping. Use the conservation of energy principle to calculate the speed of the center of mass of the cylinder when it reaches the bottom of the incline. Express your answer in terms of M , h , R , g , and I_{cm} .

Solution: see files “37.2 Worked Example – Wheel Rolling without Slipping Down Incline Plane”

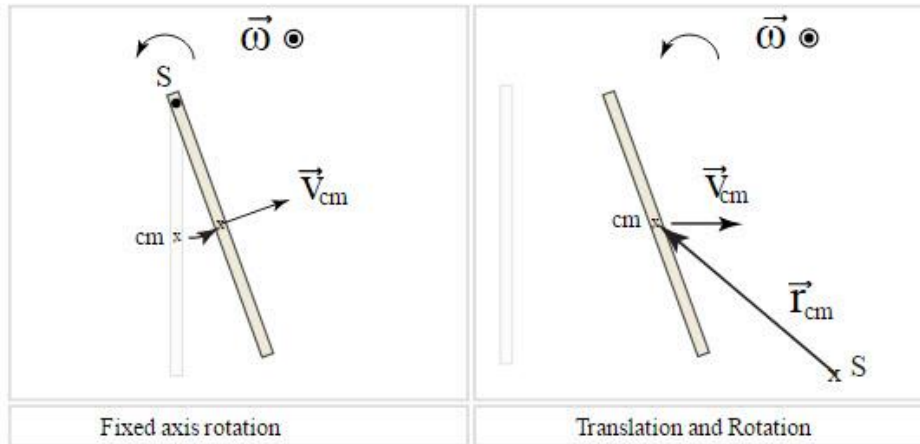
Note:

a) **Notation** in the introduced files: **p** (linear momentum); **L** (angular momentum); **W** (work); **K** (kinetic energy); and **U** (potential energy)

b) **To remember** the following summary about angular momentum and kinetic energy:

Fixed Axis Rotation vs. Translation and Rotation

Here we contrast the expressions of the angular momentum and kinetic energy for a rigid object rotating about a fixed axis vs. a rigid object translating and rotating. For the case of fixed axis rotation, the object is pivoted about point S , left figure. Both rods are identical, length d , mass m , moment of inertia about an axis passing through the center of mass I_{cm} , and about an axis passing through point S is I_S . The plane of rotation is contained in the plane of the screen. The position vector of the center of mass measured with respect to S is \vec{r}_{cm} .



Angular Momentum

$$\vec{L}_S = I_S \vec{\omega}$$

Kinetic Energy

$$K = \frac{1}{2} I_S \omega^2$$

Angular Momentum

$$\vec{L}_S = \vec{r}_s \times m \vec{v}_{cm} + I_{cm} \vec{\omega}$$

Kinetic Energy

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

Note:

In previous questions you have shown that if an object rotates about a fixed axis passing through point S and perpendicular to the plane of rotation, the angular momentum about point S is also given by: $\vec{L}_S = m \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + I_{cm} \vec{\omega}$

This is true because the center of mass is moving in a circle of radius $d/2$ with center at point S and with the same $\vec{\omega}$ as the object. As a result, the velocity of the center of mass has a magnitude $\omega d/2$ therefore \vec{L}_S becomes $\vec{L}_S = m \frac{d^2}{4} \vec{\omega} + I_{cm} \vec{\omega}$. Using the parallel axis theorem $\vec{L}_S = I_S \vec{\omega}$.

You also showed that the kinetic energy for the object rotating about a fixed axis passing through point S is expressed as

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2.$$

For the same reason as before, this is true because the speed of the center of mass is $\omega d/2$ and the parallel axis theorem.

To avoid confusion, we advise you to always write $\vec{L}_S = I_S \vec{\omega}$ and $K = \frac{1}{2} I_S \omega^2$ for the case of fixed axis rotation.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics: Statics and Dynamics; Twelfth edition 2010
- [2]. Tom W.B. Kibble and Frank H. Berkshire, *Classical Mechanics*, Imperial College; 2004
- [3]. Rudra Pratap and Andy Ruina, *Introduction to Statics and Dynamics, Book*, Oxford University Press, 2001
- [4]. Rudra Pratap and Andy Ruina, *Introduction to Statics and Dynamics, Problem Book*, Oxford University Press, 2001
- [5]. <https://www.coursera.org/learn/engineering-mechanics-statics>
- [6]. MIT OpenCourseWare

<https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/>

<https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003sc-engineering-dynamics-fall-2011/>